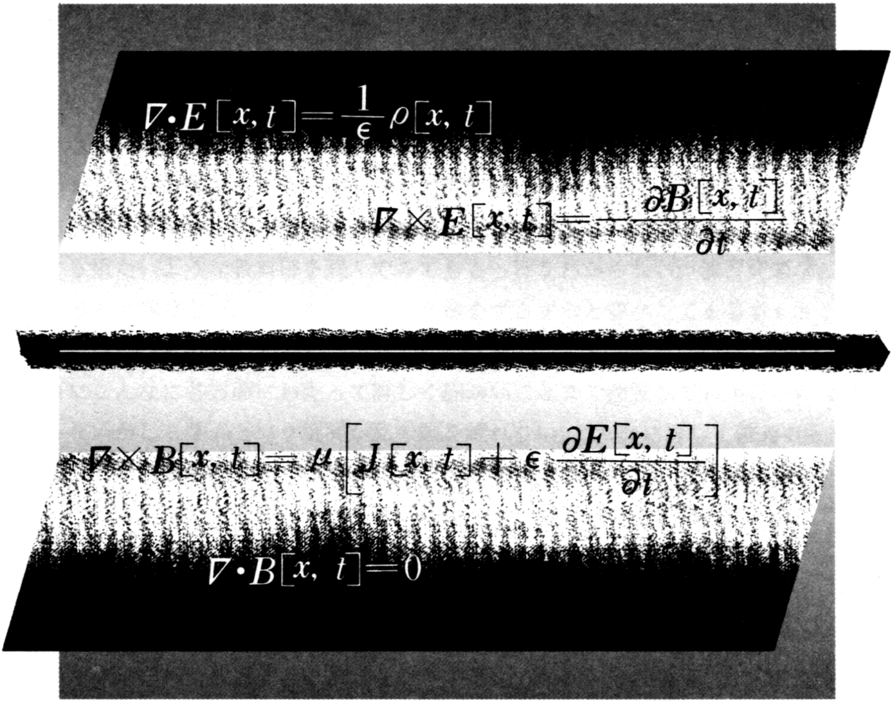
電磁気学再入門

QEDへの準備

高橋 康 著



講談社サイエンティフィク

は し が き

電磁気学の本は数えきれないくらいたくさん出版されているにもかかわらず，そのうえにまた私のごとき者が電磁気学の本を書くのには大変な抵抗を感じた，ということをまず告白しなければならない．第0章で述べるように，私と電磁気学との交渉は，大学を卒業して以来，永い永い間途絶えていた．つまり私は電磁気学で飯をくってきたわけではない．最近になって，とうとう悪運つき，電磁気学を大学の1年の学生に教えなければならない羽目になった。仕方なく少々勉強してみた．あてがわれたぶ厚い，まったくぶ厚い，下げて歩くにも重たいような教科書を読んでみてもさっぱりわからない．演習問題など，ちっとも解けない．こんなしんどい問題をずらずらと並べたてる著者もさることながら，それらがすらすら解ける学生なんて，どんな奴だろう？　学生のときにこんなに各方面にわたって詳しく細かいことまで勉強しておかなければならないかしら？　という疑問が私の頭を離れない．こんなに詳しく教えたって，どうせ大部分の学生はついてきてはくれないにきまっている．たとえ何とかついてくる秀才や才媛がいたって，卒業すれば，電磁気学を専門とする職にでもつかないかぎり，細かいことなんか直ちに忘れてしまうのは当然である．

では，どんな電磁気学の本がいいかしら？　自分の経験を生かして，電磁気学への再入門というのはどうだろうか？　細かい演習問題的な議論はやらず，電磁気学全体を見通すことができたら，そしてもう少し欲を出して量子電気力学（QED）への橋渡しができればいいのではないかしらと考えてみた．このアイディアがうまくいったかどうか？

このような本を書くことを容認するだけでなく，いろいろと激励してくださった，講談社サイエンティフィク出版部長太田一平氏に心から感謝する．なお，例によって，

作者対杜兆華的鼓励和熱誠的友誼表示衷心感謝. 没有知心的朋友兆華的支持, 本書是無法完成的.

1993 年 10 月　　北京中国科学院訪問数日前

高橋 康

目　　次

第0章　凡人と物理の基本法則

電磁気学が現代物理学の糸口となったことは周知であろう．空洞輻射の問題を通じて Planck によって量子の概念が導入され，一方 Maxwell の方程式の不変性から特殊相対性理論が定式化された経緯については，細かい技術的なことは別として，概念的なお話はよくご存じのことと思う．

大学を出てからほんの数年前まで電磁気学を勉強する機会が全然なかった．ところがどうしたことかここ数年間，大学の1年生と2年生に電磁気学を教える当番がたびたび回ってくる．大学の1年生と2年生では数学の力がどうも足りないようである．とくにベクトル解析の力がなんといっても足りない．ベクトル解析なしに電磁気学を習おうとすると，かえってことは複雑になる．にもかかわらず仕方がないから，いろいろな絵を描いたりしながら手を振り足を振ってむずかしい電磁気学を教える．しかし，教えるほうにとってもこれではどうも気持ちがよくない．靴の上から足を掻いているような気がする．

だからといって，その間電磁気学をお休みにして，ベクトル解析や数学だけ教えているわけにもいかない．やはり電磁気学の基本的な考え方にはできるだけ慣れておく必要があるだろう．そうしてむずかしい数学に慣れた時点で，もう一度電磁気学を考えなおしてみるのがよいと思う．そのようなときに役に立つかもしれないと思って書いてみたのがこの本である．したがって，この本ではベクトル解析やガウスやストークスの積分定理，それからディラックのデルタ関数，フーリエ変換などすべて遠慮なく使ってみることにした．このような技術的なことは一応わかっているとして，できるだけ物理のほうに議論を集中してみたかった．これがどの程度達せられたであろうか？

電磁気学の本では，通常電磁単位の話，静電場の話，定常電流の話などがはじめに出てくることが多い．このあたりは大変たいくつである．そこを我慢し

て通過すると今度は俄然ことが複雑になってくる.

電磁気学は大変むずかしい学問である…という印象を私は大学の学生の頃にもっていた. 力学のときとは違って, 電磁気学に出てくる人々の名前だけでも大変なものである. Ampere, Biot, Coulomb, Faraday, Gauss, Green, Heaviside, Helmholtz, Henry, Hertz, Kirchhoff, Lentz, Lorentz, Maxwell, Neumann, Ohm, Oersted, Poisson, Poynting, Savart, Thomson, Weber, …ときりがない.

それから約40年間, 私は電磁気学とはあまり接触のないまま過ごしてきたようである. せいぜい簡単な電流と電圧の関係とか, 回路の直列や並列接続とかいった日常よく出くわす初歩的知識以上のこととは無関係に過ごしてきた. 物理屋のくせに電磁気学で使う複雑な単位系のことなども, あまり考えたことはなかった. ところが, 大学の教職にある悲しさで, さきほども言ったように, 数年前, 1年生に微積分を使わずに電磁気学を教えなければならないことになった. そこで, 仕方なくいろいろな電磁気学の本を眺めながら, 40年間ほったらかしにしてあった課目について考えてみなければならなくなった. なるほど電磁気学はむずかしい! とくに微積分なしにこれを理解しようたって所詮無理なことである. 微積分だけではなく, ベクトル解析の知識は不可欠である. ものの本によると, Faraday は数学的知識を使わないで電磁気現象を理解したそうだが, それは天才のみのできることであって凡なるわれわれのよくできることではなかろう. 真似はしないほうがよい.

40年間電磁気学とは無縁の存在であった私も, その間, のんべんだらりと何もしないで暮らしていたわけではもちろんない. はばかりながら, 相対論的場の理論を, 孜々営々と学んできた. したがって私の物理学は相対論的場の理論が基礎になっているわけで, それに付随した数学的技巧なども無意識のうちに習得したであろう. 私が電磁気学の再勉強を始めても, どうしてもその数学的技巧や考え方が出てきてしまう. 物性理論を孜々営々と勉強した方が書かれた本ならば, それなりに物性論的考え方や技巧がどうしても入ってくるであろう.

だいたい物理の勉強では, 3種のことを訓練する必要があると思う. 第1は頭の訓練, 第2は手の訓練, 第3には口の訓練である. どれがいちばん重要で,

どれを先に勉強しなければならないか…ということはなかなかむずかしい問題で，個人差もあろうし偶然もある．どれ１つをとっても，それだけでは物理の訓練は成り立たない．であるから，やはり１つの課目を勉強するには，ただ１回だけ本を読んでも，ただ１回だけ講義に出ても不十分であって，頭の訓練を主にして１回，手の訓練を主にして１回，それから口の訓練を主にしてもう１回，都合少なくとも３回は勉強しなければその課目が身につかないだろう．これは凡なる私のいうことだから大部分の人にあてはまることに違いない．定義によって，世の中には凡なる人のほうが非凡なる人に比べ圧倒的に多いからである．

そこで凡なる話を続けることにすると，先日，大学院でイメジングを勉強している息子が私の書斎の机の上に，イメジングの本を置き忘れていった（わざと置いていったのかもしれない）．私はソファにねっころがって，その本をペラペラとめくってみた．表現形式こそ違えその本に使ってある技術的なことは私でもわかる．ははぁ一これはステップ関数のことだな，ははぁ一これはわれわれのいうクロネッカーのデルタのことだな，これは量子力学でよく使われる固有値問題，これは Green 関数のこと，…という具合に，私は自分のもっている技術的な知識と対応をつけていくことができた．息子のやっていることなんか技術的にはちっとも恐くないと思った．しかしその真意を理解し応用できるようになるためにはソファにねっころがっての勉強では駄目で，やはり机に向かってウンと手の訓練をしなければならないし，もっと頭の訓練をして，どのようなことが問題になり，どのような解答を用意していかねばならないのか…を勉強しなければならないだろう（と思っているだけでその後なんにもやっちゃぁいないのですが）．

とにかく，ある課目を新しく勉強する場合，なにか別の課目について知識があり，その知識との対応をつけていくことができると大変楽である．対応のつかない部分だけを新しく自分の中に取り入れていけばよかろう．したがってどの課目でもよいから，（たとえば力学を）取り上げ，その技術的なこと，物理的なアイディア，議論のもっていき方などを無手勝流で勉強し理解しておくと，他の課目の勉強は容易になるだろう．自分のすでにもっている知識との対応と

それからのずれとして理解していくことができるからである.

ところで,人間がものを理解していくやり方は,上に述べたようないわゆる線型思考だけではなく,もっと複雑な非線型思考であることはもちろんである.つまり力学をよく理解していれば,たとえば電磁気学が容易に理解できる…といったものではなく,力学のあとで勉強した電磁気学の理解がさらに元の力学の理解を深める…ということがしばしば起こる.このようなことを何度も繰り返しているうちに,数課目をなんとなくよく理解することができるのであろう.

むかし昔,私はある有名な応用数学者に出会った.この著名な応用数学者は場の理論を全然ご存じなかった(のではないのかもしれない.知らないふりをして私を試していたのかもしれない).彼が私に場の理論を教えてくれというので,私は得々と彼に講義を始めた.始めるや否や私は愚問ぜめに閉口した.たとえば,

「場の量 $\phi(x)$ とは,x を与えたときそれがある値をとるという意味で,それがオペレーターとはいったいなんのことじゃ?」

「はあ,それは x を与えたとき1個の数が決まるのではなく,オペレーターが1個決まるという意味であります」

「何じゃと? わしにはわからん!」

「はあ,それなら x を与えたとき1個のマトリックスが決まると考えて下さい」

「ますますわからん! マトリックスならマトリックス要素の集まりとして書けるであろう.それを黒板に書いて見せてくださらんか?」

「ウーン!」と私はつまる.と同時に,

「何とくだらん質問をする爺さんなんだろう」と心の中でつぶやく.

このような会話を繰り返しながら私は講義を終えたが,なんとなく不満足な感じが私の心の中に残っていた.それから2,3年たってから場の理論の基本的な定式化が Lehmann, Symanzik と Zimmermann(通称 LSZ の理論)によって提出された.これにはまさに私がくだらん質問と思った問題が議論されている.つまり線型な微分方程式を満たす漸近場が導入され,一般的な場の量はこ

の漸近場で張られる Fock space でマトリックス要素として書き表される．私は恐れ入った．うすぎたない髭を生やした爺さんのくだらない質問の意味がわかってきたし，それだけ私の場の理解も深まったわけである．くだらない質問と思ったのは私が無知であったせいであって，著名な応用数学者にとってはまったく当然の質問であったのであろう．やはり1課目に精通している人は恐いもので，ことの真髄をみきわめるのが速い．

そういえば，最近，今井功先生が「電磁気学を考える」という一連の論文を『数理科学』に書いておられるのが目についた（もう単行本も出ている）．今井先生には個人的にお目にかかったことはないが，人も知る流体力学の権威である．したがって電磁気学というものを，流体力学の立場からきわめて直観的かつ具体的に解説しておられる．Faraday まで戻って，力線だとかその圧力とか張力などの直観的概念は，いとも明快に説明してある．私自身もこの一連の論文によって電磁気学に親しみを感じるようになったことは否めない．ぜひ一読をお薦めする．

とはいっても，今井先生のような流体力学の権威がその豊富な知識を駆使して再構成された電磁気学が，流体力学の知識のない凡なるわれわれに一言一句わかるはずもないので，やさしく読み通せる読み物というわけにもいかないが．いくら言葉づかいがやさしくても，その考え方を理解するにはかなりの努力がいる．“学問に王道なし”という格言があるではないか！

電磁気学が Maxwell によって完成されたというのは事実だが，Maxwell のもともとの理論には方程式が12個あり大変複雑なものである．それを整理して現代われわれが理解している簡単な4個の方程式に整理したのは，Heaviside と Hertz の功績である．とくに，Hertz の論文には物理学一般に対する基本的な考え方の哲学が明確に述べられているから，第一線の素粒子物理学者や多体問題の研究者には是非一読を薦める．Hertz もやはり非凡な人であったのであろうから，われわれ凡なる人間の真似できることではないが少しでもあやかりたい気がする．私の友人T氏は，Hertz の論文から力強い論理を抜粋して書斎の壁に貼って日夜拝んでいる．彼の成功を祈る．

例によって余談が長くなってしまった．ここで私の目についた範囲で，いろ

いろと習うことのあった日本語の電磁気学の本をあげておく．『図解電磁気学の学び方』（桂井誠著，オーム社），それに『電磁気学』（高橋秀俊著，裳華房），少々古いところでは岩波講座のなかにある『電磁気学　上中下』（小谷正雄著，岩波書店）がある．第1の本には非常に直観的な電磁場の取り扱い方が凡人にもわかるように説明してあるし，電磁気学全体の体系についてもかなり注意が払われている．第2の本は全体の体系というよりも電磁気学の各論について，他の本にはみられない細かい注意が払われている．第3の本は残念ながらもう手に入らないが，全体の体系をとくに意識して電磁気学が展開されている（そのほかにも電磁気学の本は数限りなくあることはいうまでもない）．

いずれにしろ，前にも言ったようにたった1回勉強したって電磁気学がわかるはずもないので，頭の訓練，手の訓練，口の訓練に重きをおいた本を2，3冊さがして奮戦してみることである．

ことは物理学に限られないと思うが，ある課目，たとえばここでは電磁気学を解説する場合，できるだけ予備知識を仮定しないで話を進めるのが普通で，少々むずかしいと思われる数学などが出てくるたびに紙面をさいて物理の本筋から離れた技術的な解説が与えられる．日本における事情はよく知らないが，北米で教えた経験からすると，物理の中に数学の話を入れても学生のほうはきまって「そんな数学はまだ習っていません」と言ってくる．そのうえ単なる技術的なことと物理的な考え方との区別がなかなかつかないようである．微積分なしに力学を教えたり，偏微分やベクトル解析なしに電磁気学を教えなければならない者の苦労は他人にはわかるまい…と思う．実をいうと，当方は自分のもっているあらゆる技術を使って結果を出しておいて，その結果をあたかも当然のことのように黒板の前で話をするわけなのであって，いくらやさしい言葉で表現してみせたって技術的背景のない初歩の学生にわかってもらえるはずもないことなのだが，そこは凡人の凡なる所以，なかなか悟りの境地には達することができない．教師としての役割は，ある課目の内容そのものを理解させるということにあるのではなく，その課目に興味をもたせるということにあるだけであるというべきなのであろうか．

ところで，この『電磁気学再入門』は誰を相手にして書かれた本であろう

か？　私のように40年間近くも電磁気学にご無沙汰していた者は，世の中にはそう多くはいないだろう．しかし，量子力学や数理物理学を勉強して5年か10年たってから，なんらかの理由によって電磁気学をみなおさなければならなくなった人は案外多いのではなかろうか？　その場合，いまさら初歩的ベクトル解析や表面積分，体積積分や Fourier 積分の解説がごたごた出てくるのはかえってやっかいであろう．はじめの仮定と最後の結論がはっきり書いてあれば，各自の実力に応じて自ら手を使って途中の橋渡しをやってみたほうがおもしろいのではないだろうか（速いかどうかはわからないが）．

したがって，私はこの本では基礎方程式をはっきりと書き，それから近似なしに出てくる結論や関係をまず議論した．その場合にも出発点と結論をはっきりさせた．途中の計算は一応私なりに書いておいたが，それにとらわれず自由に，各自の経験に応じて独自の方法をあみだしてほしい．自分で手を動かしてみると，いろいろと愚問や愚答が出てきておもしろくなってくる．私の“注意”や“蛇足”がその場合手助けとなれば幸いである．

各自の経験はすべて異なるといっても，やはり基礎的知識として誰でももっていなければならない最小限の技巧というものがある．この本を読むための最小限の数学的技巧を，付録にまとめておいた．これをまず眺めて，どうもわからないと思った方は，電磁気学とは別に適当な参考書（たとえば，拙著『物理数学ノート I，II』，講談社）を勉強しておいてから第1章に進まれるように．

第1章では，電磁気学の基本になる方程式をあまり詳しい説明なしに書いておいた．物理学の基本方程式というのは，あらかじめよく定義された物理量の関係を与える…といったものではなく，物理法則が成り立って物理量が定義され，いかにそれらが測定されるかが明らかになるのであって，基本方程式に現れる物理量が，あらかじめよく定義されたものであると了解して進もうとすると，ただちに困難にぶっつかる．Newton の力学の法則を考えてみると，このことがよくわかると思う．Newton の法則には，質量 m，加速度 $\boldsymbol{\alpha}$，それに力 $\boldsymbol{F}$ が現れるが，質量 m とは何か，加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ とは何か，力 $\boldsymbol{F}$ とは何かということがあらかじめはっきりと定義されていて，第2法則がそれらの間の関係を与える…とはなっていない（初等的力学演習ではそう考えて問題を解く練習をする

が)．むしろ $m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{F}$ という式と，作用＋反作用＝0 という式がそれらの正確な意味および測定方法を与えるものなのである．

まったく同様に，電磁気学においても未知数は電場 $\boldsymbol{E}(x)$，磁場 $\boldsymbol{B}(x)$，電荷密度 $\rho(x)$ と電流密度 $\boldsymbol{J}(x)$ であって，これらの量は Maxwell の方程式と Lorentz の力の式によって規定され，測定方法が与えられるわけである．このように，物理学における基本法則はどうしてもはじめなんとなく漠然としている．この漠然とした基本法則をたよりにして物理量の意味を探っていかなければならない．えらい哲学者はなんと言われるか知らないが，私がここで基本法則を取り扱う立場はそのようなものである．

例を量子力学にとると，この点がもっとはっきりするかもしれない．Schrödinger が彼の有名な方程式を書き下した段階では波動関数 $\Psi(x)$ の明確な物理的意味は Schrödinger 自身にもわからなかった．Schrödinger 方程式をたよりにしてその意味がだんだんと明らかにされていったのである．

では，基本法則を書き下したとき，その中に含まれている量の意味が全然わからなくてもよいのか…というと，そうはいかない．できるだけ具体的に諸物理量の定義がわかっているにこしたことはない．そのうえで，それらの明確な定義，測定方法などは基本法則から<u>あいまいさなく</u>決定でき，実験結果が基本法則と矛盾しないだけでなく，新しい予言ができるとき，基本法則自体が正当化される．したがって，基本法則を書き下した段階ではそれに現れる物理量に対して完全ではないがなにかアイディアがあり，その明確でない部分をどのように見い出していくべきか，もしそれができなかったらその基本法則は完全ではないのではないか…といった問題が明確に意識されていれば，それで結構なのではないだろうか？

世に物理法則とよばれているものの中には，もちろん明確な意味をもった2個の物理量 A と B との間に比例関係が成り立つといった性質のものもある．たとえば Ohm の法則などがその例である．物理屋によってはこのようなものを“法則”とはいわずに“関係”とよぶべきであると主張する人もいる．

このような事情で，私はこの本では，かなり漠然とした立場をとらざるをえなかった．しかし少なくとも私なりに，問題だけははっきりと書き出しておい

たつもりであるが，読者自身でも賢問愚問を遠慮なく提出して進んでいかれるように。

本論に入る前に，ちょっとおもしろい英語を紹介しておくと：

Don't do as I do.
Do as I say.
Study hard!

第１章　Maxwell の方程式

§1　は　じ　め　に

まずはじめに，われわれは三次元の空間と一次元の時間からできている四次元の世界に住んでいることを承認しよう．そして，空間座標，時間座標をいつでも頭に描いておこう．この空間と時間の中で，近接作用論の立場をとることに決めておかなければならない．つまり，この空間の中の物質の影響は，三次元空間の各点を順々に時間をかけて伝わって遠くのほうの点に移っていく．

いま，そばで鳴っているラジオも，放送局から発射された電波が空間を順次に伝わって私の家まで達し，それを受信機で受けて増幅しているわけである．夜空にロマンティックに輝く星だって，遠い遠い空間を毎秒 300,000,000 メートルの光速度ではるばる渡ってわれわれの目に達したのであって，千光年のかなたにある星の光は，千年前にその星を離れたのである．200 万光年の遠方のアンドロメダ星雲のことなど考えると気が遠くなる．

Maxwell が光と電場と磁場を統一する理論を構成したのは 19 世紀の末だが，それより何百万年以前に発射された光が，Maxwell の理論を満たしたまま，いま地球に達してきたのだからおもしろい．何百万年の昔でも，光は相変わらず Maxwell の方程式を満たしていたのであろうかと疑いたくなる．

Maxwell の方程式をいま受け入れるということは，何万年，何千万年の昔でも，光はまったく同じ機構で発射されたということを受け入れることになる．というのは，Maxwell の理論には，いついつ以後に，これらの方程式が成り立つという指定がしてないからである．このことを物理屋は，「Maxwell の理論は，時間の推進に対して不変である」と表現する．このことから，電磁場のエネルギー（と荷電粒子のもつエネルギーの和）が保存されるということが出て

くる．

また，Maxwell の理論には，地球上でだけ成り立つという指定もない．いいかえると，地球上でも何億光年のかなたの星の上でも成り立つことが前提となっている．このことを物理屋は，「Maxwell の理論は，空間の推進に対して不変である」と言う．このことから，電磁場の運動量（と荷電粒子の質量の流れの和）が保存されるという主張が出てくる*)．

では，「光の速度」といった場合，どの座標系を基準にした速度なのだろうか？高速度の宇宙ロケットで飛んで光の速度を測るとどうなるだろうか？ Maxwell の理論（それは，真空中で，光の速度がいつでもどこでも同じく c だという）は間違っているのだろうか？ Newton の力学の基本法則には速度というものが入っていないから，この疑問は起こらなかったが，ご存じのように Maxwell の基本方程式には光速度がもろに入っているから，これを気にしだすとますます気になる．事実，前世紀の終わりにはこれが物理学の中心問題であった．

しかし，幸いなことに，今世紀の初めに Einstein によって，この問題は解決された．光（電磁波の一種）はどんな座標系においても同じ値 c をとる．これを基本にして，時間，空間や速度といった概念を再構成していく．

電場や磁場は，いうまでもなくベクトル場である．ベクトル場ということは，単に 3 成分があるということではなくて，座標系の回転に対して，3 成分が一定の決まった変換を受けるということである．Maxwell の方程式は，座標系の回転に関しても決まった変換をするように与えられているから，互いに回転で結ばれるような座標系ならどんな座標系で書いても同じ形をしている．このことから，また保存則が出てくる．それは角運動量の保存則である．

ベクトル場の空間分布を決めるには，何個の方程式が必要であろうか？ これには，発散（1 成分）と回転（3 成分）の合計 4 個の量を知らなければならない（ただし，4 個が全部独立ではなく，そのうち 3 個が独立である．付録 6 を見よ）．したがって 2 個の場を規定するためには，8 個の方程式（そのうち 6 個が

---

* 厳密にいうと，保存則を主張するには，Lagrangian や Hamiltonian の不変性がいる．ここでは，Maxwell の方程式が，Lagrangian か Hamiltonian から導かれるということを，当然のこととして仮定した．

独立)が必要である．かくて，電磁場を規定するMaxwellの方程式は全部で8個の式となる．

次の節でこれら8個の式を導入するが，単位などの取り方などにより，式は細かい点で異なってくる．ここではKMS(キログラム，メートル，秒)をもとにしたSI (Systēm International d'Unités) 単位系を用いる．

この単位系は大変論理的にできてはいるが，しかし，微視的な物理系を取り扱う場合には大きすぎる．CGS単位系との換算表を書いておくと：

$$1\ \text{newton} = 10^5\ \text{dyne}$$

$$1\ \text{joule} = 10^7\ \text{erg} = 6.242\times10^{18}\ \text{electron volt}$$

$$1\ \text{tesla} = 10^4\ \text{gauss}$$

$$1\ \text{coulomb} = 2.998\times10^9\ \text{esu}$$

$$1\ \text{ampare} = 2.998\times10^9\ \text{esu sec}^{-1}$$

などである．これらの単位の意味は基本法則から明らかになる．

電子の電荷は（これは電荷の最小単位)，

$$e = 1.60\times10^{-19}\ \text{coulomb} = 4.803\times10^{-10}\ \text{esu},$$

Planckの定数を2πでわったもの（量子力学の基本定数）は，

$$\hbar = 1.0546\times10^{-34}\ \text{joule sec} = 1.0546\times10^{-27}\ \text{erg sec},$$

Boltzmannの定数（統計力学の基本定数）は，

$$k_B = 1.3807\times10^{-23}\ \text{joule K}^{-1} = 1.3807\times10^{-16}\ \text{erg K}^{-1}$$

また，Bohrマグネトンは，

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.2741\times10^{-24}\ \text{joule tesla}^{-1} = 9.2741\times10^{-21}\ \text{erg gauss}^{-1}$$

である．上に出てきた単位のことは，電磁場の基本法則を学んだあとで議論しよう．

現代の場の理論の立場からすると，相対論的不変性，時間，空間の推進に対する不変性を満たすベクトル場の方程式は，時間・空間微分の階数に対する制限と，線型性まで含めるとあまり選択の可能性はなくなり，Maxwellの方程式以外のものをつくることのほうがむずかしい．しかしながら，これらの普遍的，形式的な要求は今世紀に入ってから認められたことであって，Maxwell,

Heaviside, Hertz らが電磁場の方程式を書き出した頃には，指導原理として知られてはいなかった．

§2 Maxwell (Heaviside, Hertz) の方程式

ベクトル場の空間分布を決めるためには，発散と回転を指定しなければならない．いまわれわれが問題にするのは，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$，磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$，電荷の密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ と電流の密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ である．当分の間，$\rho(\boldsymbol{x}, t)$ と $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ とは，ある種の条件を満たす与えられた電荷と電流の密度分布として，それらから，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ を決める．

以下，まず物理は別として天下りに基本方程式を書き，それらの方程式が数学的に矛盾しないことを確かめてから，そのあとでどれだけ物理的内容を取り出すことができるかを調べていこう．

(1) 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ の発散は，電荷 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ によって決まり，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.1}$$

である．ここに ε_0 というのは正の数で，電荷と電場の相対的な次元を決める定数である．どのように選ぶのがよいのかはあとで議論する．(1.1) の物理的に意味するものも，どうやって $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ を測るかに関連してあとで考えよう．

(2) 次には電場の回転を知らなければならない．それは磁場の時間的変化によって，

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

で与えられる．物理的意味はやはりあとで考える(右辺の負号にはとくに注意)．

これら 2 つの式の右辺が与えられれば，電場の空間分布は決まるはずである．

(3) 磁場のほうの空間分布は，

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)=\mu_0\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\right\} \tag{1.3}$$

および，

(4)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)=0 \tag{1.4}$$

で与えられる．ここに出てきた定数 μ_0 も正で，磁場と電流の相対的な次元を決める．また ε_0 といっしょになって，電場と磁場の相対的次元を決める．

これで8個の方程式がそろった．これらを真空中における **Maxwell の方程式**とよぶ．前にもいったように，これらはすべて独立ではない（さらに，物質中では，これらの式は補正されなければならない）．そこで，方程式のコンシステンシーをまず調べてみよう．数学的にコンシステントでなかったら，物理的意味を考える根拠がないではないか！ 少なくとも，未知数と方程式の数とが一致していなくては，お話にならない．

(1.2) の左から ∇· を作用させると，左辺は (A.3.3) により恒等的にゼロ，一方，右辺は (1.4) によってゼロになる．

(1.3) の左から同じく ∇· を作用させると，左辺はゼロ，右辺は，

$$0=\mu_0\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\} \tag{1.5}$$

これに (1.1) を代入すると（μ_0 はゼロでないから），

$$0=\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{1.6}$$

でなければならない．つまり，はじめから電流密度と電荷密度とを (1.6) を満たすように与えておかないと，(1.1) と (1.3) とはコンシステントになっていないわけである．

(1.6) は電荷と電流の間に成り立つ連続の方程式である．これはいまのところ，外から与えられたものと考えるが，元来は荷電粒子の運動方程式から出てくるべきものである．

【蛇足】

4個の式 (1.1) ～(1.4) をゆっくりと眺めてみよう．たとえば，(1.3) と (1.4) はそのままにしておいて，(1.2)の右辺の符号を正にしてはどうだろうか？ この段階では，そうしても数学的に矛盾は起こらないだろう．しかし，そうすると，あとでわかるように，電磁場のエネルギーが正にならない（第2章§3参照）．また (1.2) の右辺に，発散がゼロになるような項を付け加えておいても，やはり(1.4)とはコンシステントである．そのほか，右辺のあちらこちらを数学的に矛盾しないように変えてみるとおもしろい．しかし，いったん (1.1) を承認すると，(1.3) の右辺の組み合わせは変えられない．連続の方程式 (1.6) があるからである．重要なことは，場の空間微分と時間微分とが互い

に規定し合っていることである．そのために，時空を伝播する電磁波が可能になる．

(1.2) の右辺の符号のことだが，エネルギーを正の量として定義できなくなるばかりでなく，実は相対論的観点からすると，やはり自由度はなく，そこだけ符号を変えることはできないのである．そこだけ符号を変えると，相対論と矛盾してくる．相対論を受け入れる立場では，(1.1) だけが必要で，あとは相対論的不変性から出てくると主張する学者もいる．つまり，(1.1) がどんな観測者にも当てはまるなら，あとの式は当然成り立たなければならないというのである．ここでは，初っ端からあまり形式的な議論を展開しないが，話が進むにつれてだんだんとわかってくると思う．

(1.1) ～(1.4) を眺めて少々気になることは，これらの方程式が電場と磁場に対して，対称になっていないという点である．対称である必要は必ずしもないが，対称であれば，理論はもっと美しい．たとえば，磁場の式 (1.4) の右辺がゼロではなく，電荷密度に対応して磁荷の密度が入り，また (1.2) の右辺に，電流に対応して磁流が付け加わると，電場と磁場とが対称になる．このような可能性は，Maxwell の理論が提唱された頃，Heaviside によって考えられ，ずっとあとになって今世紀の半ば頃 Dirac が同じ考えを再提唱して，急に人々の関心をひくようになった．それ以後，その可能性を実験的に確認する努力がなされたが，いまのところ，磁荷や磁流の存在は実験的に見い出されていない．したがって，ここでは磁場と電場の間の非対称性を容認しておく．

さて，保存則 (1.6) に矛盾しないような電荷と電流の密度が与えられたとき上の式 (1.1) ～(1.4) で，電場と磁場は決まるはずだが，それらの場が，電荷や電流にどのような力を及ぼすだろうか？　上の 4 つの式はそれに答えてはくれない．つまり力学との関連がまだわかっていない．それに答えるのが，いわゆる力に関する Lorentz の法則である．それによると，電荷の密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ と電流の密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ には，**Lorentz の力**（の密度）

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.7}$$

が働く．これで力学との関連がつく．

たとえば，電荷 e をもった点粒子があると，非相対論的な理論では電荷および電流の密度はそれぞれ，

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = e\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \tag{1.8 a}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) = e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \tag{1.8 b}$$

である．ここに，$\boldsymbol{\xi}(t)$ とは点粒子の位置ベクトルである．ドットは時間微分を意味する．まだ，電荷としてどんな単位を取ったらよいのかはわからない．(1.8)

を (1.7) に代入し全空間にわたって積分すると，この電荷に働く電気磁気的な力になる．デルタ関数はただちに積分できて，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{\xi}(t)}{dt^2}=\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$
$$=e\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t),t)+\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\} \tag{1.9}$$

となる．右辺の電場と磁場とは，粒子の位置における値になっていることに注意．(1.9) を言葉というと，

「荷電粒子の質量の流れの時間的変化は，荷電粒子の点における Lorentz の力に等しい」

である．ここで，質量の流れといい，運動量といわなかった点にとくに注意してほしい．電磁場があると，粒子の運動量は質量の流れとは別物になる (36 頁参照．または，適当な力学の教科書をみられたい)．

粒子の運動方程式 (1.9) と，上の 4 つの Maxwell の方程式で閉じた系をつくる．電磁場が粒子に作用して，(1.9) によってその運動が規定され，逆にその運動が (1.8) を通じて電磁場を規定している．多くの荷電粒子のある系への拡張はやさしいであろう．

以上が電磁場と古典的荷電点粒子との相互作用系である．

荷電粒子を量子力学で取り扱う場合には，電場と磁場だけでは相互作用が書けない．それは，量子力学では，基本的な物理量として，速度ではなく運動量をとることによる．このときには，あとの節で導入するベクトルとスカラーのポテンシャルが必要になる．古典論でも，運動量を基本にする Hamiltonian で相互作用を取り扱おうとすると同じことが起こる．これは，先ほど述べた，質量の流れと運動量が異なってくることとも関係がある．そして，ゲージ不変性というようなやっかいな話が入り込んでくる．量子論的取り扱いは第 5，6 章で勉強しよう．

§3　縦成分と横成分への分解

基本方程式 (1.1)～(1.4) と (1.7) が出そろったので，それらの物理的意味をみたいが，このままでは複雑すぎて手に負えない．電場と磁場が入り乱れて

いる．それをある程度分離するために，すべてのベクトル場を縦成分と横成分に分離しよう．いうまでもなく，発散が縦成分を決め，回転が横成分を決める．細かい話は付録6を参照されたい．

まず電流から考える．連続の方程式

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1.10}$$

を取り上げ，与えられた荷電分布から，どれだけ電流が決まるかという問題を考察しよう．公式

$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1.11}$$

を使うと，(1.10) から，

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t} \tag{1.12}$$

となる．$\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)$ は電流の**横成分**で，恒等的に，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\equiv 0 \tag{1.13}$$

を満たすものならまったく勝手で，電荷の分布の時間的変化とは無関係に与えられるものである．

(1.12)の右辺第2項，つまり電荷の分布の時間的変化によって決まる部分を，

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t} \tag{1.14}$$

とおく．これは電流の**縦成分**であり，恒等的に，

$$\nabla\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t)\equiv 0 \tag{1.15}$$

および，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}'\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}'\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}=-\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{1.16}$$

を満たす．あとでみるように，この縦型の電流は Maxwell の方程式の中では，いつでも縦型の電場の時間的変化と消し合って，磁場を発生しない．

次に，電流と同じように，電場をも縦と横の成分に分けて，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\equiv\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.17}$$

とおく．ただし，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0 \tag{1.18}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0 \tag{1.19}$$

である．

磁場のほうは，(1.3) によっていつでも横成分しかもっていない（横とか縦とかいう言葉の意味は，あとで Fourier 変換を導入したとき明らかになる．当分の間，(1.18)，(1.19) を満たす成分の数学的な名前だと思っていればよい）．

横と縦の成分で Maxwell の方程式を書きなおすと，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.20}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{1.21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0\left\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\right\} \tag{1.22}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.23}$$

となる．

これらをみると，まず (1.20) 以外には電場の縦成分は入っていないから，安心して積分を遂行でき，

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{x}' \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}', t) \tag{1.24}$$

が得られる．これが，(1.19)を恒等的に満足することは明らかであろう．(1.24)は，電荷に対する **Coulomb の法則**である．たとえば，原点に静止している電荷 Q に対しては，

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = Q\delta(\boldsymbol{x}) \tag{1.25}$$

だから，これによってできる電場は，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{Q}{|\boldsymbol{x}|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2} \tag{1.26}$$

で，よく知られた Coulomb 場である．Lorentz の力によって，点 $\boldsymbol{x}$ にある電荷 Q' には，距離の 2 乗に反比例する Coulomb 力

$$F_{\mathrm{C}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{|\boldsymbol{x}|^2} \tag{1.27}$$

が働く．場が電荷からの距離の2乗に反比例するということが，あとで取り扱う電磁波との大きな違いである．

【蛇足】

(1) 上にみたように，電荷の密度の時間的変化は電流の一部しか与えない．電流には，電荷の密度の時間的変化と全然無関係な部分がある．たとえば，中性子は電荷をもっていないが、静止状態においても，磁気能率による電流が流れている．したがって，電流をいつでも電荷の動きと理解するのは無理なことがある．

(2) 方程式 (1.20) ～(1.23) をみて気がつくことは，電場の縦成分の時間微分を決める式が含まれていないことである．これは実は，電荷・電流の保存則 (1.10) の中に隠れている．少々手を動かせばすぐわかるように，縦成分の時間微分は，電流の縦成分で与えられ，

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.28}$$

となる．しかしこれは独立な式ではないから，別に考慮する必要はない．磁場を決める式 (1.22) では，この式のために，横型電流と横型電場の時間的変化だけが磁場を発生させる．

(3) (1.24)でちょっと気になることは，右辺と左辺と同一の時刻が入っていることである．時刻 t で点 $\boldsymbol{x}'$ にある電荷の分布が，まったく同時刻の別の点 $\boldsymbol{x}$ における電場を決めている．これは近接作用の考え方と矛盾するようにみえる．点 $\boldsymbol{x}'$ から点 $\boldsymbol{x}$ まで作用が伝わるには，少なくとも $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c$ だけの時間がかかるはずである．

この問題への解答は自分で考えてみてほしいが，ヒントを与えておくと： もし，電荷が時間によるならば，連続の式 (1.6) により電流はゼロでなくなるが，この遅延効果は消し合って，(1.24) のようになる．したがって，磁場ができるか，あるいは (1.28) により電流の縦成分が効いてくる．全体をちゃんと計算すると，うまい具合に遅延の効果が出て，それらが消し合う．ぜひ自ら試してみられたい(なお，第2章§5の議論参照)．

次に，電場の横成分を取り出してみたいが，それは磁場とからまっており分離がむずかしいので後回しにし，ここでは，ある（皿のような）有限の面 S を考え，それを貫く磁場の時間的変化を計算してみる．(1.21) に Stokes の定理 (A.4.3) を当てはめてみればよい．するとただちに，

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{d}{dt}\int_S dS(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.29}$$

が得られる．右辺は，静止している面 S を貫く**磁束**

$$\Phi_{\mathrm{B}}(t) \equiv \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.30}$$

の時間的変化（に負号をつけたもの）である．なお，(1.30) は，(1.23) のために，面 S の形によらない（証明は，演習問題）．

一方，(1.29) の左辺は，面 S の縁 ∂S にわたって横電場を足し合わせたものである．

$$\mathcal{E}_{\partial S}(t) \equiv \oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.31}$$

で定義される量を，e.m.f. という．e.m.f. とは，元来は electromotive force の略だが，いまではこれがそのままでは力ではないことがわかっているから，単に e.m.f. とよぶ習慣になっている．これは，前の，電荷によってできた縦電場とは違い，磁束 (1.30) の時間的変化によって生じた横電場を面 S の縁 ∂S にわたって加え合わせたものである．∂S の上に電荷 e を置くと，その電荷には Lorentz の力が働く．そしてその電場は ∂S を一周する間に，

$$e\mathcal{E}_{\partial S}(t) = e\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.32}$$

だけの仕事をする．これが，磁束の時間的な変化が e.m.f.を生むという Faraday の電磁誘導の法則

$$\mathcal{E}_{\partial S}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_{\mathrm{B}}(t) \tag{1.33}$$

である．この式の右辺に負号がついていることの意味は重大である．よく考えてみてほしい．

次に (1.22) に移る．この式の意味をみるためには，いろいろな方法がある．まず，(1.21) で使ったのと同じ手を使ってみよう．つまり Stokes の積分定理 (A.4.3) を応用してみる．すると，静止した皿のような開いた面 S に対し，

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \mu_0\left\{\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\right\} \\ &= \mu_0\left\{\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\right\} \end{aligned} \tag{1.34}$$

となる．左辺は磁場をある閉曲線 ∂S にわたって足し合わせたもの，循環である．右辺の括弧の中の第1項は，面 S を貫く電流の横成分の和（全電流）で，

これは(1.13)により面 S の形によらない．第2項もやはり，(1.18)のために，面の形によらず，S を貫く横電場の電束

$$\Phi_{\mathrm{E}}(t) \equiv \varepsilon_0 \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.35}$$

の時間的変化の割合を示す．横電場の電束の時間的変化が，あたかも電流のような働きをしている．これを（S を通る）**Maxwell の変位電流**（displacement current）という．関係（1.34）は，したがって電流による磁気作用に関する Ampare の法則を，Maxwell の変位電流まで含めて拡張したものである．Biot-Savart の法則というのも，この特別な場合である（70 頁参照）．

最後の式（1.23）は簡単すぎてかえってわかりにくい．磁場は横成分しかないということだが，これは何を意味するのだろうか？　「磁極に関する Coulomb の法則」などと書いてあることもあるし，「単磁極が存在しないということ」だと書いてある場合もある．それはいったい何のことであろうか（電場の縦成分を決める式（1.20）と比べてみよ）？

単磁極がありえないことは，(1.23)の右辺がゼロだということからすぐわかるが，よくいわれる磁気双極子はなぜあってもよいのか？　磁極の北極と南極が離れて存在していたら，(1.23）の右辺はゼロになりえないのではないか？

（1.23）を，まったく任意の体積 V にわたって積分すると，Gauss の定理によって，

$$\oint_{\partial V} d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.36}$$

が得られる．この関係はまったく任意の閉曲面に対して成り立つ．したがって，ある任意の閉じた曲面を考えたとき，その中に入っていく磁束((1.30)をみよ)と出ていく磁束とがいつでも等しい．だから，単極であれ双極であれ存在しえない．

それにもかかわらず，磁気双極子などというものを考えるとはどういうことだろうか？　このような疑問に答えるためにはかなり手を動かさなければならない．したがって，この議論はあとに回す．結果をいっておくと，次のようになる．磁気双極子とは，直観的に磁極の北極と南極が棒でつながったようなも

のを考えてはいけない．輪になった電流をとり，それをうんと遠くから眺めると，それがあたかも，その間にCoulomb力の働いた，磁極の北極と南極を棒でつないだものが発生したような磁場と同じにみえる，という意味である．

§4 単位の問題

いままでに書き並べたいろいろな式から，電場や磁場，電荷や電流，ε_0やμ_0の次元を決めておこう．

まず，(1.2) から，

$$\left[\frac{E}{B}\right]=LT^{-1}=(\text{velocity})\equiv c \tag{1.37}$$

(1.3) から，

$$[\varepsilon_0\mu_0]=\frac{L^{-1}}{T^{-1}}\left[\frac{B}{E}\right]=\frac{T^2}{L^2}=(\text{velocity})^{-2}\equiv c^{-2} \tag{1.38}$$

Lorentz の力から，

$$\left[\frac{\rho}{J}\right]=\left[\frac{B}{E}\right]=\frac{T}{L}=(\text{velocity})^{-1}=c^{-1} \tag{1.39}$$

力を

$$\text{newton}=\text{kg m sec}^{-2} \tag{1.40}$$

で測ると，

$$[L^3\rho E]=[L^3JB]=\text{newton} \tag{1.41}$$

したがって，

$$[E]=(\text{coulomb})^{-1}\,\text{newton} \tag{1.42 a}$$

$$[B]=(\text{meter})^{-1}(\text{ampare})^{-1}\,\text{newton} \tag{1.42 b}$$

となる．ここに，

$$(\text{coulomb})=[L^3\rho]\equiv C \tag{1.43 a}$$

$$(\text{ampare})=[L^2J]\equiv A \tag{1.43 b}$$

で，それぞれ電磁気学で初めて出てきた新しい次元の単位である．ただし，(1.39) により C と A とは独立ではなく，

$$\left[\frac{\rho}{J}\right]=\frac{1}{L}\left[\frac{C}{A}\right]=c^{-1} \qquad \therefore\quad C=A\,\text{sec} \tag{1.44}$$

ちょうど力学に質量という新しい単位が入ったように，coulomb と ampare という単位は，電磁気学に新しく入る単位で，力学的な量には帰せられない．これらの単位をどのように決めるかは，以下に説明する．(1.44)の関係があるので，C か A かのどちらか1つを基本にとっておけばよい．通常は A のほうを基本にとる．そうすると，

$$[E]=\text{newton}(\text{ampare})^{-1}(\text{sec})^{-1}=\text{newton}(\text{coulomb})^{-1} \tag{1.45}$$

$$[B]=\text{newton}(\text{ampare})^{-1}(\text{meter})^{-1}\equiv\text{tesla} \tag{1.46}$$

となる．

はじめに出てきた定数 ε_0 や μ_0 のどちらかを決めるのが，次の仕事である．一方が決まれば，他の一方は (1.38) から決まる．ε_0 を決めるには (1.27) の Coulomb 力を利用するのが簡単である．等量の電荷 Q を互いに 1 meter 離して置いたときの力が，

$$F=\frac{(2.998\times10^8)^2}{10^7}\,\text{newton}=8.988\times10^9\,\text{newton} \tag{1.47}$$

であるとき，その電荷を 1 coulomb と決める．ここで 2.998×10^8 というのは，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の比 (1.37) に出てきた速度の次元をもった定数 c で，あとでわかるようにこれは電磁波の真空中における速度

$$c=2.998\times10^8\,\text{meter sec}^{-1} \tag{1.48}$$

である．もちろんこれを決めるのは実験屋さんの仕事である．(1.47) から，

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{(2.998\times10^8)^2}{10^7}\,\text{newton}\,\frac{(\text{meter})^2}{(\text{coulomb})^2} \tag{1.49 a}$$

$$\therefore\quad \varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\frac{(\text{coulomb})^2}{\text{newton}(\text{meter})^2} \tag{1.49 b}$$

となる．そして (1.38) から，

$$\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}=4\pi\times10^{-7}\,\text{ampare}^{-2}\,\text{newton}$$
$$=1.2566\times10^{-6}\,\text{ampare}^{-2}\,\text{newton} \tag{1.50}$$

が得られる．

磁束は

$$L^2[B]=\text{newton ampare}^{-1}\,\text{meter}\equiv\text{weber} \tag{1.51}$$

という単位で測られる．電束のほうは，

$$L^2[\varepsilon_0 E] = L^2 \frac{(\text{coulomb})^2}{\text{newton}\,(\text{meter})^2} \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}} = \text{coulomb} \tag{1.52}$$

である．

関係式（1.47）によって電荷の単位 1 coulomb を決めたとき，電荷の最小単位，電子の電荷（符号を別として）は，

$$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\text{coulomb} \tag{1.53}$$

となる．よく知られた，無次元の微細構造定数は Planck 定数を 2π でわったものを $\hbar$ として，

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.036} \tag{1.54}$$

である．

§5　電磁波の方程式

さて，(1.20)～(1.23) に戻り，電場の横成分を分離することを考えよう．まず，(1.21) の左から ∇ をかけ，(A.3.2) を使うと，

$$\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)) - \nabla^2 \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.55}$$

が得られる．これら横成分の定義式（1.18）と Ampare の法則（1.22）により

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.56}$$

一方，(1.22) に ∇ をかけると，(1.21) と (1.23) のために，

$$\nabla^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = -\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.57}$$

となる．これで横電場と磁場が完全に分離された（とはいっても，前の (1.21) は相変わらず成り立っているから，電場と磁場が独立に動くわけではないことに注意．これは，(1.56)，(1.57) の右辺の形から明らかであろう）．

(1.56)，(1.57) の左辺は，もし右辺がゼロならば，速度

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{1.58}$$

で伝播する波動の方程式である．この c が物質のない空間を電磁波が伝播する速度となる．(1.56)，(1.57)の右辺は，電流そのものではなく，電流の変化が電磁波の源になっていることを示している．

これらの2つの式は，Maxwellの方程式 (1.20) ～(1.23) から，まったく近似なしに導かれたものだが，それらと同等ではない．(1.56)，(1.57) からは (1.20) ～(1.23) には戻れないからである（演習問題）．

電磁波は，電流がないときは (1.58) で与えられる速度 c で伝播するが，もし電流が連続に分布した中を伝播するときには，一般に速度は c より小さくなる．この点は，あとで議論しよう．

電磁波として空間を伝わっていく電場と磁場（ともに横成分）は波の進行方向に垂直である．(1.56)，(1.57)は電場と磁場のベクトルのほかに電流のベクトルも含んでいるから，それらすべてのベクトルの相対的関係の一般論がほしいところである．しかし，これはややこしい．このことはむしろ，これらの式を積分してから特別の例をみたほうがわかりやすい．ここでは電流が全然ない場合を考える．

(1.56) と (1.57) の右辺をゼロとおくと，

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1.59}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1.60}$$

ただし，(1.58) を使った．前にいったように，この場合でもMaxwellの方程式はそのまま成り立っているから，その中で必要なものをもう一度書いておくと，

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.61}$$

これがあとでみるように，電場，磁場と電磁波の伝播方向の相互関係および電場と磁場の大きさの関係を与える．

電磁波の波数ベクトルと角振動数の関係を求めるために，(1.59)，(1.60)にそれぞれ，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \tag{1.62}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \tag{1.63}$$

を代入すると,

$$\left(-\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{c^2}\omega^2\right)\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})=0 \tag{1.64}$$

$$\left(-\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{c^2}\omega^2\right)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})=0 \tag{1.65}$$

したがって, $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{b}$ がゼロでないとき

$$c^2\boldsymbol{k}^2=\omega^2 \tag{1.66}$$

である. いま,

$$\omega_k=c|\boldsymbol{k}| \tag{1.67}$$

とおくと,

$$\omega=\pm\omega_k \tag{1.68}$$

となる. 正号のほうは $\boldsymbol{k}$ 方向へ速度 c で進む波, 負号のほうは $-\boldsymbol{k}$ の方向へ速度 c で進む波を表す (付録12参照).

電場と磁場の相対的方向を見い出すには, (1.61) を使う. (1.68) の正号のほうをとると,

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})=\omega_k\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \tag{1.69}$$

したがって, 図1.1のように $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ の3個のベクトルが右手系を作っており,

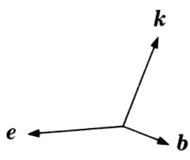


図1.1

すべてが直交している. また, (1.67), (1.69) により,

$$|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})|=c|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})| \tag{1.70}$$

である. つまり, 電場の振幅は磁場のそれに比べ, c 倍だけ大きい.

(1.68) の負号のほうをとると,

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})=-\omega_k\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \tag{1.71}$$

で，$-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}$ が右手系を作る．いずれにしろ，波の進行方向と電場と磁場の3個のベクトルはすべて直交し，右手系を作っている．

電磁波はこのように常に横波である．つまり波の進む方向に垂直に振動している．そして（1.70）により，電場と磁場がいつでも共存していることがわかる．光の反射や屈折などの現象は Maxwell 方程式の境界値問題として取り扱うことができる．

一方，実験的には，Hertz が，電磁波の存在を確認し，しかも電磁波は，反射，屈折，偏りなどのような光とまったく同じ性質をもつことを実証した．Hertz はさらに，電磁波の波長と振動数の積から速度を計算し，それが光の速度に一致することを確かめた．

Maxwell の理論は，かくて電気と磁気と光学の問題を統一的な観点から記述することに成功したのである．

電場の作る振動面を，**偏光面**という．磁場についていわないのは，光としてわれわれの目に感じられる成分は電場のほうだからである．

ここで1つ注意しなければならない点は，上に取り扱った電場は，電場の全体ではなく，その横成分だけであるということである．あとで示すように，電流から遠くのほうでは電場の横成分が圧倒的であって，縦の成分は省略してもかまわないのである．

電磁場が波として空間を伝播すると，それに伴ってエネルギーや運動量が運ばれる．電磁場の運ぶエネルギーとか運動量とはいったい何であろうか？　それらの物理量をちゃんと定義しておくことが次の仕事になる．

【注意】

（1.56），（1.57）は波以外の解も含んでいる．たとえば，（1.56），（1.57）で時間微分をゼロとおくと，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},0)=0 \tag{1.72}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},0)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}',0) \tag{1.73}$$

という解が得られる．(1.73)は，定常電流が磁場を生むという Biot-Savart の式である．

定常電流の作る磁場は (1.73) にみられるように，電荷に対する Coulomb の法則と同じように，電流の各要素からの距離の 2 乗に反比例している．したがって，遠方では波の解のほうが圧倒的である．

演 習 問 題 I

1.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{x}'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\Theta(\boldsymbol{x}')+\frac{1}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{x}'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}')$$

で与えられるベクトル場が,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\Theta(\boldsymbol{x})$$
$$\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$$

を満たす条件は何か？

2.　次の場合につき，連続の方程式を確認し，かつ各場合の物理的意味を考えよ.

(a)

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=e\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))$$
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))$$

(b)

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=e\{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_+(t))-\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_-(t))\}\theta(t)$$
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=e\{\dot{\boldsymbol{\xi}}_+(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_+(t))-\dot{\boldsymbol{\xi}}_-(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_-(t))\}\theta(t)$$

ただし，$\dot{\boldsymbol{\xi}}_+(0)=\dot{\boldsymbol{\xi}}_-(0)$

(c)

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=Q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))$$
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=Q\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))$$

で,

$$\boldsymbol{\xi}(t)=(a\cos\omega t,a\sin\omega t,0)$$

のとき.

(d)

$$\rho(\boldsymbol{x})=\frac{Q}{\pi}\delta(\boldsymbol{x}^2-a^2)\delta(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\omega\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})$$

ただし $\boldsymbol{e}$ はある方向を向いた単位ベクトル，ω と a はそれぞれ時間の逆数，長

さの次元をもった与えられた数とする.

3. (1.29) の物理的意味を説明せよ. 右辺の負号の意味を考えよ.

4. 磁束 (1.30) が面 S の形によらないことを証明せよ.

5. 一次元の波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(z, t)=0$$

の一般解を求め, v の物理的意味を考えてみよ.

6. 三次元の波動方程式

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\boldsymbol{x}, t)=0$$

を球面座標 r, θ, ϕ で表し, r の大きいところでの一般解を求めよ. v の物理的意味は何か?

第2章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§1　は　じ　め　に

前章で，電磁場の基礎方程式 (1.1)～(1.4) と Lorentz の力の式 (1.7) を与えた．Lorentz の力のおかげで，電磁場の系と力学の系の相互作用を取り扱うことが可能になった．

ただちに起こる疑問は，両系の間にエネルギーやその他の物理量の交換がありうるだろうかということである．荷電粒子が電磁場と相互作用をしてエネルギーを失ったとすると，そのエネルギーはどこへいったのであろうか？　エネルギーが保存することを容認し，全体系のエネルギーが保存するように，電磁場系のエネルギーをうまく定義することができるかどうか．また，運動量などの他の物理量はどのように定義したらよいだろうか？　電磁波の散乱や発射や吸収の計算をしたいと思ったら何を計算すればよいのか？　これらは結局のところ，エネルギーや運動量のやりとりの計算である．

そこでこの章では，これらの電磁場に伴う物理量を，電磁場系と力学系の全体系の保存則を容認したうえで定義していく．

それから，Maxwell の基礎方程式から，ベクトルとスカラーのポテンシャルを導き，ゲージ変換について考える．これは荷電粒子を量子論的に取り扱うとき重要だからである．

ちょっとここで，注意しておかなければならないことは，相対論との関係である．粒子に対する Newton の方程式は，Galilei 変換に対して不変であって，それに Einstein の相対性理論をそのまま使うことはできない．一方，Maxwell の理論は Einstein の相対性原理を満たしてはいるが，Galilei 変換に対しては不変になっていない．したがって，Newton の運動方程式と Maxwell の方程式を

同時に使うことには無理がある．同時に使うことができるのは，座標系を限り，その座標系で粒子の速度が光のそれに比べてはるかに小さいときだけである．

§2 荷電粒子の物理量

いま，電荷 e，質量 m をもった1個の点粒子と電磁場からなる系を考える．この粒子には電磁的な Lorentz の力だけが働いているとする．

粒子の位置座標を $\boldsymbol{\xi}(t)$ で表し，時間微分をドットで表すと，粒子の Newton の運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)=e\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t),t)+\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\} \tag{2.1}$$

したがって，

$$\begin{aligned}m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))&\\ &=e\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t),t)+\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\\ &=\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\equiv\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

である．ただし，

$$\rho(\boldsymbol{x},t)\equiv e\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.3 a}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)\equiv e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.3 b}$$

は，それぞれ非相対論的な荷電粒子の電荷密度と電流密度である．なお (2.2) の右辺の Lorentz の力の密度には，外から荷電粒子にかかる電磁場も，荷電粒子自身が作る電磁場も含まれていることに注意．

さて，この荷電粒子の質量密度とその流れは，それぞれ，

$$\rho^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x},t)\equiv m\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.4 a}$$

$$\boldsymbol{J}^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x},t)\equiv m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.4 b}$$

である．(2.3) と (2.4) はともに，定義から，運動方程式とは無関係に連続の方程式を満たす．

質量の流れ (2.4 b) に対して，質量の流れの流れ（歪みテンソル）を

$$t_{ij}^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x},t)\equiv m\dot{\xi}_i(t)\,\dot{\xi}_j(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.5}$$

で定義すると，容易に確かめられるように，点粒子の質量の流れの密度に対して，バランス方程式

$$\dot{j}_i^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x},t)+\partial_j t_{ij}^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x},t)=f_i(\boldsymbol{x},t) \tag{2.6}$$

が成り立つ（記号は明らかと思うが，$i=1,2,3$ で，繰り返した添字 j に対しては 1 から 3 までの和がとってある）．右辺に Lorentz の力の密度が出てきているのは，運動方程式（2.2）による．

さらに，粒子のエネルギー密度とその流れを，

$$\mathcal{E}^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.7 a}$$

$$J_i^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)\,\dot{\xi}_i(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.7 b}$$

で定義すると，エネルギーに対するバランス方程式

$$\mathcal{E}^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x},t)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \tag{2.8}$$

が得られる．(2.6) にしろ (2.8) にしろ，両辺を全空間にわたって積分すればすぐわかるが，粒子の質量の流れやエネルギーが，粒子系だけでは保存していないことを示している．したがって，粒子の質量の流れやエネルギーは，電磁場にもっていかれたにちがいない．(2.8) の右辺は，電磁気的なエネルギーが力学的なエネルギーに変化する割合を示している．

§3　電磁場のエネルギー

そこで，電磁場のほうのエネルギーをうまく定義して，全体系のエネルギーを保存させることができるかどうかを調べてみる．さしあたっての条件としては，エネルギーの密度はいつでもどこでも正でなければならない．

以下，空間と時間を 1 つの文字 x で表し，Maxwell の方程式を使って計算すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\}\\
&\quad=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\cdot\dot{\boldsymbol{E}}(x)+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(x)\cdot\dot{\boldsymbol{B}}(x)\\
&\quad=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(x)\cdot\{\nabla\times\boldsymbol{B}(x)-\mu_0\boldsymbol{J}(x)\}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(x)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}(x))\\
&\quad=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))-\boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x)
\end{aligned} \tag{2.9 a}$$

となる．または，これを，ある静止した体積にわたって積分して，

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\}$$
$$=-\frac{1}{\mu_0}\int_{\partial V}d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))-\int_V d^3x\,\boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x) \tag{2.9 b}$$

を得る．この式とエネルギーのバランス方程式 (2.8) を足し合わせると，うまい具合に，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)+\mathcal{E}^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}$$
$$+\nabla\cdot\left\{\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))+\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}=0 \tag{2.10}$$

という連続の方程式が得られる．したがって，電磁場のエネルギーとその流れを，

$$\mathcal{E}^{(\mathrm{ele})}(x)\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \tag{2.11 a}$$

$$\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)\equiv\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) \tag{2.11 b}$$

で定義するのが合理的である．エネルギー密度 (2.11 a) はいたるところで正である．

エネルギーの流れの密度を表すベクトル (2.11 b) は，**Poynting ベクトル**とよばれる．(2.9 b) は，電磁場のエネルギーのゆくえを計算するとき，重要な関係である．(2.9 b) の右辺第2項は電磁的エネルギーがどれだけの割合で増えていくかを示す（これには負号がついているから，実は減っているといったほうがよいかもしれない）．

【蛇足】

(1)　第1章§2の蛇足のところで，Maxwell 方程式の右辺の符号のことにふれたが，エネルギーが正値をとるべしという条件から，その符号の任意性がなくなることが，(2.9) から出てくる．これは演習問題．

(2)　実際に流れるエネルギーは，Poynting ベクトルの縦成分だけである．横成分のほうは，エネルギーの出入りには関係がない（付録7参照）．つまり，

$$(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{2.12}$$

だけが，エネルギーの出入りに関係している．電場の縦成分はエネルギーの流れに関与しない．電磁波は横波で，そのエネルギーは波の進む方向に運ばれる．

(3)　ここの議論は，はじめにいったように，非相対論的な，粒子の速度が小さいような限られた座標系でしか成り立たない．しかし，上に定義したエネルギーやその流れの表式（2.11）は，そのまま相対論においても正しい．

§ 4　電磁場の慣性の流れ

前節とまったく同じように計算を進めていけば，慣性の流れについても同様に保存量が定義できる．しかし，計算は少々面倒である．ざっとその計算を書いてはおくが，面倒がらずに，是非紙と鉛筆を使って自分の計算力を試してほしい．

まず Maxwell の方程式だけ使って，

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}=\varepsilon_0\{\dot{\boldsymbol{E}}(x)\times\boldsymbol{B}(x)+\boldsymbol{E}(x)\times\dot{\boldsymbol{B}}(x)\}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x)-\boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x)-\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(x)) \quad (2.13)$$

次に，ベクトル解析と Maxwell の方程式により，

$$\left\{\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x)-\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(x))\right\}_i$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right)-\varepsilon_0 E_i(x)E_j(x)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu_0}B_i(x)B_j(x)\right\}-\rho(x)E_i(x) \quad (2.14)$$

(2.13) と (2.14) をいっしょにして，

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}_i$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right)\right.$$

$$\left.-\varepsilon_0 E_i(x)E_j(x)-\frac{1}{\mu_0}B_i(x)B_j(x)\right\}$$

$$=-\rho(x)E_i(x)-(\boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i \quad (2.15\,\mathrm{a})$$

この式の右辺は，Lorentz の力に負号をつけたものになっている．この式を積分すると，

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\varepsilon_0(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i=-\int_{\partial V}dS_j t_{ij}(x)-\int_V d^3x f_i(x) \tag{2.15 b}$$

というバランス方程式が得られる．ただし，

$$J_i^{(\mathrm{elm})}(x)\equiv\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}_i \tag{2.16 a}$$

$$t_{ij}^{(\mathrm{elm})}(x)\equiv\left\{\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)-\varepsilon_0E_iE_j-\frac{1}{\mu_0}B_iB_j\right\} \tag{2.16 b}$$

を定義する．すると，粒子に関する式 (2.6) といっしょにして連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{J_i^{(\mathrm{p})}(x)+J_i^{(\mathrm{elm})}(x)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{t_{ij}^{(\mathrm{p})}(x)+t_{ij}^{(\mathrm{elm})}(x)\right\}=0 \tag{2.17}$$

に到達する．この保存則は物理的になにを表しているのであろうか？ 運動量保存といいたいところだが，残念ながら，電磁場と相互作用している粒子では，運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ と慣性の流れとは別物になり，

$$m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{p}(t)-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}(t),t) \tag{2.18}$$

である．ただし，右辺の $\boldsymbol{A}(x)$ というのは，あとで出てくる電磁場のベクトルポテンシャルである(§6 をみよ．なお，(2.18)の関係については 130 頁参照)．(2.17) の左辺の第1項に出ているのは，運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ ではなく，(2.4 b) の「慣性の流れ」である．だから，(2.17) を運動量保存則とよぶわけにはいかない．それは，あくまで「慣性の流れ」の保存則である．事実，エネルギーの流れ (2.11 b) と (2.16 a) とを比較してみると，

$$\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\boldsymbol{J}^{(\mathrm{elm})}(x)=c^2\boldsymbol{J}^{(\mathrm{elm})}(x) \tag{2.19}$$

が成り立つ．左辺は「エネルギーの流れ」であり右辺は「慣性の流れ」である．エネルギーと慣性が c^2 で結ばれているというのは，よく知られた相対論的関係

$$E=mc^2 \tag{2.20}$$

にほかならない．たびたびいったように，Maxwell の理論ははじめから相対論的であって，(2.20) に対応する関係 (2.19) が出てきたのは当然のことである．一方，非相対論的な場合には，粒子のエネルギーの流れ (2.7 b) と慣性の流れ (2.4 b) の間には (2.19) のような簡単な関係は存在しない．

【蛇足】

にもかかわらず，(2.17) の関係は，たびたび「運動量保存則」とよばれている．電磁場があるときの運動量と慣性の違いは，解析力学ではよく知られているはずだが，粒子のほうを，相対論的に書きなおしてもこの事情は変わらない．

では，電磁場があると運動量は保存されないのかという疑問が起こる．これは，この段階で議論するにはあまりにもむずかしい問題なので，ここではこれ以上深入りしない．ゲージ変換を勉強したあと，この章の最後でまた考えなおそう．粒子の慣性の流れ(2.4 b)だけでなく，エネルギー(2.7 a)やエネルギーの流れ(2.7 b)，慣性の流れの流れ(2.5)においても同様に，関係 (2.18) を使って，粒子の運動量とベクトルポテンシャルで書きなおしてから物理的解釈をしなければならない．ベクトルポテンシャルから出てきた項は，電磁場と粒子の相互作用を表す項である．

(2.16 b)で導入された量は，本質的には，よく知られた**Maxwellの応力テンソル**である（通常は，これに負号をつけたものを Maxwell の応力テンソルという．その物理的意味については，次の章参照)．

§5　電磁場の波動方程式

前章§5では，電磁場の波動方程式を導く場合，まず横成分を分離し，もとの方程式を簡単化してから横波が波動方程式を満たすことを示した．縦成分のほうはどうしているのだろうか？　このほうは波として遠くのほうに伝わっていくのだろうか，いかないのだろうか？　遠くに伝わっていくとしたら横波との関係は？

この節では，横と縦の成分を分離しないで，元のままの Maxwell の方程式 (1.1)～(1.4) から再出発しよう．やり方は，前章§5とまったく同じだから繰り返さないで結果を書くと，(1.56)，(1.57) の代わりに，

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho(x)+\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(x) \tag{2.21}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{B}(x)=-\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}(x) \tag{2.22}$$

が得られる．これらの方程式を，遅延 Green 関数 (A.9.1) を使って積分すると，電磁場の全体が得られる．

電場の横成分と縦成分を別々にみるには，上の（2.21）から（1.56）を引いてやればよい．すると，

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho(x)+\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(x) \tag{2.23}$$

が得られる．この方程式を遅延 Green 関数を使って形式的に積分すると，前に気にしていた遠隔作用論的表現（1.24）に対する解答が得られる．

（2.21），（2.22），（2.23）などを実際に積分することは，次の節で，ベクトルとスカラーのポテンシャルを導入したあとでやるほうが簡単（といっても，かなり複雑）だから，次の章まで保留しておく．

【注意】

しかし，（2.23）の左辺第2項の時間微分は，みせかけにすぎないことに注意されたい．（1.28）によって，この項は右辺の第2項と消し合っている．

§6 ベクトルとスカラーのポテンシャル

しつこいようだが，もう一度 Maxwell の方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.24}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{2.25}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x)=\mu_0\boldsymbol{J}(x) \tag{2.26}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{2.27}$$

を眺めてみよう．はじめにいったように，電荷と電流が与えられたものとすると，これは，6個の未知量に対する8個の方程式だから少々扱いにくい．何とかして，未知量と方程式の数とを一致させることはできないであろうか？

（2.25）と（2.27）とは電荷と電流の分布には無関係である．とくに（2.27）は，$\boldsymbol{B}(x)$ が，あるベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ を用いて，

$$\boldsymbol{B}(x)\equiv\nabla\times\boldsymbol{A}(x) \tag{2.28}$$

と表されることを示している．さらにこの関係を（2.25）に代入すると，

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}(x) + \dot{\boldsymbol{A}}(x)) = 0 \tag{2.29}$$

したがって，あるスカラー関数 $A_0(x)$ を用いて，

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) - \nabla A_0(x) \tag{2.30}$$

とおくと，(2.29) は自動的に満たされる．(2.28) と (2.30) の表示を採用すると (2.25) と (2.27) とは自動的に満たされるから，もうこれらは忘れてもよい．(2.30)で $A_0(x)$ の前の符号を負にとったのは便宜にすぎない．物理的に重要な Faraday の電磁誘導の法則は，(2.30)によって自動的に満たされる恒等式になってしまった．

さてこれで，いくつの未知量と方程式が得られたであろうか？　未知量は，電場，磁場，ベクトルとスカラーポテンシャルで，全部で 10 個である．一方，方程式のほうは，(2.24) が 1 個，(2.26) が 3 個，(2.28) が 3 個，(2.30) が 3 個と，全部で 10 個となり，未知量の数と一致する．

話がごたごたしたので，もう一度必要な式だけ書き出しておくと：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.24}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(x) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x) = \mu_0 \boldsymbol{J}(x) \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{B}(x) \equiv \nabla \times \boldsymbol{A}(x) \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) - \nabla A_0(x) \tag{2.30}$$

であって，他の式はもう考えなくてもよい．

(2.28) と (2.30) を，Coulomb の法則 (2.24) と Ampare の法則 (2.26) に代入して，整理すると，

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\chi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.31}$$

および

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) - \nabla\chi(x) = -\mu_0 \boldsymbol{J}(x) \tag{2.32}$$

が得られる．ここに

$$\chi(x) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) \tag{2.33}$$

である．したがって，与えられた電荷と電流の分布に対して (2.31)，(2.32) を解くことができれば，(2.28)，(2.30) によって電場と磁場を知ることができる．しかし，(2.31)，(2.32) はこのままでは，まだ複雑すぎる．とくに，左辺の第2項 $\chi(x)$ を含む項が気に入らない．この項は何とか無視するわけにはいかないだろうか？　もしそれが無視できれば，方程式 (2.31)，(2.32) の形式的な積分は遅延 Green 関数を使ってすぐできる．

そこで，重要な役割を演じるのが，ゲージ変換の概念である．ゲージ変換の自由度を使って，(2.31) と (2.32) を簡単にしようというのである．

§7 ゲージ変換

前節で，$\boldsymbol{A}(x)$ と $A_0(x)$ を導入したときの事情を振り返ってみると，与えられた電場と磁場を与えるようなポテンシャルは $\boldsymbol{A}(x)$ と $A_0(x)$ に限られないことがわかる．たとえば，いままでの $\boldsymbol{A}(x)$ と $A_0(x)$ と

$$\boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}(x) + \nabla\lambda(x) \tag{2.34 a}$$

$$A'_0(x) = A_0(x) - \frac{\partial}{\partial t}\lambda(x) \tag{2.34 b}$$

なる関係で結ばれている，ダッシュのついたポテンシャルは，まったく同じ電場と磁場を与える．すなわち，(2.28)，(2.30) により，

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}'(x) \tag{2.35 a}$$

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) - \nabla A_0(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}'(x) - \nabla A'_0(x) \tag{2.35 b}$$

である．$\lambda(x)$ はまったく任意の関数である．(2.34) を，**ポテンシャルに対するゲージ変換**とよぶ．電場と磁場とは，ポテンシャルに対するゲージ変換に対して不変である．つまり，10個の未知数に対する10個の方程式は，未知数を完全に決定していない．$\lambda(x)$ という1個の関数だけ未定である．事実，ベクトルポテンシャルの発散は，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の定義には現れておらず，これを勝手に決めても関係 (2.28)，(2.30) はそのまま成り立つことがわかる．ベクトルポテンシャルの発散は，χ だけに入っているから，それを適当に決めて，χ を消してしまう

ことができる．

(2.33) の $\chi(x)$ は，ゲージ変換 (2.34) に対して不変ではなく，変換

$$\chi'(x)=\chi(x)+\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda(x) \tag{2.36}$$

を受ける．この変換性を利用して $\lambda(x)$ を適当に選び，(2.36) の左辺がゼロになるようにすると，この変換されたポテンシャルに対しては，前の方程式(2.31)と (2.32) は簡単に，

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0(x)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.37 a}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x)=-\mu_0\boldsymbol{J}(x) \tag{2.37 b}$$

となるが，ポテンシャルには条件

$$\chi(x)\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x)=0 \tag{2.38}$$

がついていることを忘れないように．これは電荷と電流の間に成り立つ連続の方程式と矛盾しない．

条件 (2.38) を満たすようにベクトルポテンシャルの発散を制限することを，**Lorentz ゲージ**をとるという．Lorentz ゲージに話を限ってもなお，ポテンシャルは一義的には決まらず，

$$\boldsymbol{A}'(x)=\boldsymbol{A}(x)+\nabla\lambda_{\mathrm{L}}(x) \tag{2.39 a}$$

$$A'_0(x)=A_0(x)-\frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\mathrm{L}}(x) \tag{2.39 b}$$

に対して，電場と磁場は不変である．ただし，ゲージ $\lambda_{\mathrm{L}}(x)$ は，

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda_{\mathrm{L}}(x)=0 \tag{2.40}$$

を満たす範囲のものに限られる．Lorentz ゲージは相対論的な観点からよく使われる．Lorentz ゲージをとるということは，実は四次元の意味でポテンシャルの横成分だけを問題にすることであるともいえることを注意しておく．

【蛇足】

Lorentz ゲージ条件 (2.38) を満たす 4 つの量 $\boldsymbol{A}$，A_0 をさらに 1 つのベクトル $\boldsymbol{\Pi}$ で，

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Pi}(x)$$

$$A_0(x)=-\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}(x)$$

と表現しようというのが Hertz ベクトルである．この本では，これを使う機会がない．

もう1つ，よく使われるゲージのとり方に，**Coulomb ゲージ**というのがある．それはゲージを適当に選び，ベクトルポテンシャルの発散を，

$$\chi(x)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x)=\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)=0 \tag{2.41}$$

に制限することである．つまり，$\boldsymbol{A}(x)$ の横成分だけを取り出すことである．したがって，以下 $\boldsymbol{A}(x)$ を $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$ と書く．こうすると，すぐわかるように，(2.31)，(2.32) は，

$$\nabla^2 A_0(x)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.42 a}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=-\mu_0\boldsymbol{J}(x)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0(x) \tag{2.42 b}$$

と，少々きたない式となる．しかし，(2.42 a) のほうはすぐ積分できて，

$$A_0(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(x')\big|_{t'=t} \tag{2.43}$$

となるから，(2.42 b) にこれを代入し，

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$$

$$=-\mu_0\boldsymbol{J}(x)+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(x')\big|_{t'=t}\right] \tag{2.44 a}$$

$$=-\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x) \tag{2.44 b}$$

が得られる．最後のところでは，前に出てきた (1.12) を使った．(2.44 a) の右辺には電荷による Coulomb の項が出てきた．これが，Coulomb ゲージとよばれる理由である．Coulomb ゲージの条件 (2.41) は (2.44 b) の右辺と矛盾しないようになっている点に注意．

Coulomb ゲージの条件 (2.41) の制限内でゲージ変換をするには，ゲージ関数として，

$$\nabla^2\lambda_{\mathrm{C}}(x)=0 \tag{2.45}$$

を満たすようなものに限っておかなければならない．これはかなり強い制限で，たとえば，無限の遠方でゼロになるという境界条件をつけるとゼロしか解がなくなる．つまり，ゲージ変換の自由度がなくなる．

【蛇足】

(1) 上には，電磁場のポテンシャルに対するゲージ変換を議論したが，粒子の解析力学をここでちょっと思い出してほしい．粒子の位置を $\boldsymbol{\xi}$，運動量を $\boldsymbol{p}$ とするとき，位置と運動量は各成分について，Poisson 括弧

$$[\xi_i, \xi_j]_{\text{P.B.}}=0 \tag{2.46 a}$$

$$[\xi_i, p_j]_{\text{P.B.}}=\delta_{ij} \tag{2.46 b}$$

$$[p_i, p_j]_{\text{P.B.}}=0 \tag{2.46 c}$$

が成り立つ．いまこれらの変数に変換

$$\boldsymbol{\xi}'=\boldsymbol{\xi} \tag{2.47 a}$$

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.47 b}$$

を施し，これが正準変換であることを要求すると，(2.46 a)，(2.46 b) は問題なく満たされるが，(2.46 c) は，Poisson 括弧の性質により，

$$\begin{aligned}[p'_i, p'_j]_{\text{P.B.}}&=[f_i(\boldsymbol{\xi}), p_j]_{\text{P.B.}}+[p_i, f_j(\boldsymbol{\xi})]_{\text{P.B.}}\\ &=\frac{\partial f_i}{\partial \xi_k}[\xi_k, p_j]_{\text{P.B.}}+[p_i, \xi_k]\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k}\\ &=\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}-\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i}=0\end{aligned} \tag{2.48}$$

でなければならない．すなわち，もし $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})$ が一価関数ならば，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})=\nabla_{\xi} g(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.49}$$

でなければならない．いいかえると，変換(2.47)が正準変換であるならば，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})$ は(2.49)という形（ある関数の微分という形）をしており，

$$\boldsymbol{\xi}'=\boldsymbol{\xi} \tag{2.50 a}$$

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+\nabla_{\xi} g(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.50 b}$$

が正準変換になる．

ここで，慣性の流れ (2.18) を思い出すと，電磁場のベクトルポテンシャルが，ゲージ変換 (2.34 a) を受けたとき，同時に粒子の運動量がゲージ変換

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+e\nabla_{\xi}\lambda(\boldsymbol{\xi}(t), t) \tag{2.51}$$

を受けるとすると，慣性の流れはゲージ不変になる．したがって，(2.17)という連続の方程式はゲージに無関係に成り立つ．運動量を (2.51) のように変換しないとゲージ変換に対して不変にならない．運動量はゲージ不変な概念ではないのである．(2.51) を，**粒子の運動量に対するゲージ変換**とよぶ．

このゲージ不変性は現代物理学の基本的要求であって，それが素粒子論で大きな成果

をあげたことはよくご存じのことと思う．

(2)　Lorentz ゲージの場，つまり (2.38) を満たす場の場合，座標系を指定して，空間成分を，

$$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}(x) \tag{2.52}$$

と分けると，電場の横成分と縦成分とはそれぞれ，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)=-\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x) \tag{2.53 a}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x)=-\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{L}}(x)-\nabla A_0(x) \tag{2.53 b}$$

と表される．磁場のほうはいつでも横成分で，

$$\boldsymbol{B}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x) \tag{2.54}$$

である．

縦成分は形式的に，

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}(x)=\frac{1}{\nabla^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)) \tag{2.55 a}$$

と書くことができる．そこで Lorentz 条件 (2.38) を使うと，これは $A_0(x)$ で書きなおせて，

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}(x)=-\frac{1}{c^2\nabla^2}\nabla\dot{A}_0(x) \tag{2.55 b}$$

となる．この式を (2.53 b) に代入すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x)&=\frac{1}{c^2\nabla^2}\nabla\ddot{A}_0(x)-\nabla A_0(x)\\&=\frac{1}{\nabla^2}\nabla\left\{\frac{1}{c^2}\partial_t{}^2-\nabla^2\right\}A_0(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{\nabla^2}\nabla\rho(x)\end{aligned} \tag{2.56}$$

これは，Coulomb の法則 (1.24) にほかならない．つまり $\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x)$ は電荷によって作られる Coulomb 場である．

一方，電場の横成分のほうの時間微分は，

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}(x)&=-\ddot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x)=-c^2\{\nabla^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)+\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x)\}\\&=c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x))-c^2\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x)\end{aligned} \tag{2.57 a}$$

$$\therefore\quad\nabla\times\boldsymbol{B}(x)=\mu_0\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x)+\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}(x)\} \tag{2.57 b}$$

これは Ampare の法則 (1.22) にほかならない．

電場の横成分は2成分が独立であり，これらが輻射場を表す．一方，縦成分は1成分で，これが指定した座標系で A_0 といっしょになって，遅延効果が消し合い，Coulomb 場 (1.24) となる．

(3)　Lorentz の条件 (2.40) は，ゼロ以外の解をもつが，実はそれは四次元のすべての遠方でゼロにはならない．したがって，(2.40)を満たすゲージの自由度は，Coulomb ゲージのときと同じように，実は存在しないというべきである．この点についてあまり深刻に議論した教科書はみあたらない．

§8　粒子と電磁場の相互作用

さて，電磁場の中にある粒子の慣性の流れと運動量の関係は（2.18）のように，

$$m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{p}(t)-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}(t),t) \tag{2.58}$$

なので，以前に導いた保存則（2.10）や（2.17）はすべて，この式を使って書きなおさなければならない．

（2.10）は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)}(x)=0 \tag{2.59}$$

で，全エネルギー密度とその流れはそれぞれ，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x)=&\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\\&+\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)}(x)=&\frac{1}{2m^2}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\\&+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\end{aligned} \tag{2.61}$$

となる．また，慣性の流れの保存則（2.17）のほうは，

$$\frac{\partial}{\partial t}J_i(x)+\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}(x)=0 \tag{2.62}$$

で，全慣性密度とその流れはそれぞれ，

$$J_i(x)=(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))+\varepsilon_0(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}t_{ij}(x)=&\frac{1}{m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_i(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))+\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right)-\varepsilon_0E_i(x)E_j(x)-\frac{1}{\mu_0}B_i(x)B_j(x)\end{aligned} \tag{2.64}$$

となる．これらの式はすべてゲージ変換（2.34）と（2.50）に対して不変である．

粒子の運動量をゼロとおいても，前に定義したエネルギー（2.11）や慣性（2.16）には戻らないことに注意されたい．（2.11）や（2.16）との差，すなわち，粒子の電荷 e のついた項を，粒子と電磁場の相互作用とよぶ．

とくにエネルギー密度（2.60）の相互作用項は重要で，この項が電磁波の発射や吸収をつかさどる．この問題は第7章で取り扱う．

演 習 問 題 II

1. 慣性の流れに対するバランス方程式(2.6)を導け. ただし, 運動方程式(2.1)を用いてよい.

2. エネルギーに対するバランス方程式 (2.8) を導け.

3. 等式 (2.9 a) を自ら導いてみよ. とくに Maxwell 方程式の 1 つ (2.2) の右辺の符号を変えたとしたら, エネルギーのバランス方程式 (2.9 a) はどのような変化を受けるだろうか?

4. (2.31) および (2.32) を導け.

5. 前章§5の議論を用い, 電荷, 電流のないところでの, 電磁波のエネルギーおよびその流れを計算してみよ.

6. Maxwell の方程式は Galilei 変換に対して不変ではないと本文に述べたが, それはどういうことであろうか?

7. 空洞内の輻射については, 平均において, (圧力) $=\dfrac{1}{3}$(エネルギー密度) が成り立つことを示せ.

8. Maxwell の方程式から, 縦・横成分を分離しないで (2.21), (2.22) を導いてみよ.

9. 全エネルギー密度 (2.60) において, 電荷 e のかかった項を分離して書いてみよ. それを, 粒子と電磁場の相互作用 Hamiltonian という.

10. 電磁場の角運動量密度を定義せよ.

11. (2.27) は, 磁場 $\boldsymbol{B}(x)$ が, ベクトルの横成分 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$ だけを用いて,

$$\boldsymbol{B}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$$

と書けることを意味している. これを (2.25) に代入し電場の横成分と縦成分を $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$ と $A_0(x)$ で表現してみよ.

12. Lorentz ゲージをとったとき,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)+\frac{1}{c^2}\dot{A}_0(x)\right\}=0$$

$$\nabla\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)+\frac{1}{c^2}\dot{A}_0(x)\right\}=0$$

がそれぞれ Coulomb の法則，Ampare の法則を与えることを証明せよ．Coulomb ゲージのときはどうか？

第3章　電磁場の力線と調和振動子

§1　は　じ　め　に

いままで，Maxwell の方程式を天下りに書き並べ，主に数学的なコンシステンシーを調べてきた．そろそろ物理の話に入らなければならない．

まず，抽象的なベクトル場を直観的に理解するには，流体力学でおなじみの力線という概念を用いるのがよいかもしれない．事実 Faraday は Maxwell の理論が提出される前には，力線のアイディアで電磁気現象を整理していた．むしろ，Faraday の直観的な力線のアイディアを数式に乗せたのが Maxwell であった，と言ったほうがいいのかもしれない．Maxwell の貢献はもちろんそれだけではないが．新理論を発見した 26 歳の Maxwell に，66 歳の Faraday が送った尊敬の情のこもった手紙はあまりにも有名である．

力線を用いると，抽象的な電場や磁場が目に見えるようになるが，これはいわばムービーのひとこまひとこまを見ているようなもので，電磁場の時間的動きまで力線で理解するのはなかなかむずかしい．少なくとも，力線のイメージだけで計算を実行することは到底不可能であろう．ちょうど，相対論を理解するのに，空間・時間図形は大変有力な武器ではあるが，実際の計算には，テンソル解析にたよらなければならないようなものであろう．

しかし，前章で導入した，電磁場のエネルギー密度や Maxwell の応力テンソルは，力線で理解すると，圧力とか張力といったいままで使い慣れた力学的な量で記述することができるという利点がある．

一方，場の問題に対してやはり有効な力学的な手法に，一般化座標を用いる手がある．そうすると，力学で有力な Lagrangian や Hamiltonian の方法をすぐ転用できて，量子論への移行に便利である．

そこでこの章ではこれら2つの方法，つまり力線のイメージおよび一般化座標の方法を勉強しよう．前者は，ベクトル場を直観的にとらえるため，後者は逆に場を解析的に理解するためである．

§2 力　　線

まず，ベクトル場をきわめて直観的にとらえることを考えよう．時間を固定して，空間の各点に，その点におけるベクトル場の大きさと方向を示す矢を書き込む．もちろん，これは想像だけでできることである．想像の上でこれらの矢の全体を見たとき，それがベクトル場である．各矢が，時間的に方向を変えたり長さを変えているとき，時間に依存する場となる．隣り合った矢の，長さと方向の関係を与えるのが空間微分である．近接作用論では，ある一点の矢は，その両隣りと前後上下にある矢だけから影響を受ける．遠くにある矢は直接には影響しない．Maxwell の方程式が空間に関して1階微分しか含んでいないのはこの事情の反映である．時間に関しても直前と直後の矢との関係だけが重要で，ずっと以前や以後の矢は直接関係しない．しかも時間，空間的に隣り合った矢は無限小の違いしかないので，偏微分方程式という形式で場の方程式が与えられる(電荷の不連続な分布があるとき，例外的なことが起こることもある)．

このベクトル場のある空間の中に，線を書く．そして，その線上の任意の点における接線がその場所でのベクトル場の方向と一致するとき，その線を，ベクトル場の**力線**という．これは時間を固定しての話である．電場の力線を電気力線といい，磁場の力線を磁力線という．

電気力線も磁力線も，互いに交錯することはできるが，自分自身と交わることは決してない．電場も磁場も一価だからである．

空間のいたるところに力線を書くことができるが，力線の（単位面積当たりの）密度はその点における場の強さに比例する．たとえば，Coulomb 場(1.16)の力線は，原点を通る放射状の直線である．その密度は r^{-2} に比例する．一方，電場の強さも同じく r^{-2} に比例している．この性質を利用して，

“電気力線に垂直な単位面積を通って電気力線を $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ 本引く”

という約束をしておくと便利である．同じく，

“磁力線に垂直な単位面積を通って磁力線を B 本引く”

と約束する．$\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ を**電束密度**，$\boldsymbol{B}$ を**磁束密度**とよぶ．たとえば，電荷 Q による Coulomb の場では，放射状の電気力線の数は Q 本である．電束密度は電荷からの距離の2乗に逆比例して小さくなる．

もう1つ，縦型の場の力線に関して便利な性質は，力線の曲がり方とも関係があり，縦型の場は力線の曲がる方向に強くなる．

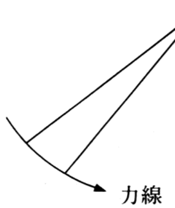


図3.1

これらのことは頭においておくと便利である．力線は数学的にもちゃんと表現できるが，それにはかなり数学がいるから，深入りしないほうが賢明であろう．上に例にあげた Coulomb 場の力線を数式で表してみると，それが納得できると思う(演習問題)．いずれにしろ，場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ がわかっているとき，時間を固定して微分方程式

$$\frac{dx}{E_x(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dy}{E_y(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dz}{E_z(\boldsymbol{x},t)} \tag{3.1 a}$$

を解くと，電気力線が得られる．$d\boldsymbol{x}$ とは，電気力線の線要素である．

$$d\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{3.1 b}$$

と書いても同じことである．(3.1) は，電気力線の線要素が電場と平行している，という表現である．

電場が横型であるとき，任意の閉じた面について，

$$\oint_{\partial V}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{3.2}$$

が成り立つから，有限な面を貫く電束の数は面の形によらない．磁束はいつで

も横型だから，一定の面を貫く磁束の数はいつでも面の形によらない（この数はもちろん時間的には変わる）．したがって，空間の一点で磁力線が切れるようなことは絶対に起こらない．磁力線は無限のかなたから来て無限のかなたへ去っていくか，それとも自分自身で輪になっているかである．

§3　電磁場のエネルギーと応力テンソル

第2章で学んだ，荷電粒子のないところでの電磁場のエネルギー密度

$$\mathscr{E}^{(\mathrm{ele})}(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \tag{3.3 a}$$

およびエネルギーの流れ

$$\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{3.3 b}$$

を力線の言葉でいうと，次のようになる（荷電粒子のないところで）．

（i）“1本の電気力線は，単位長さについて $\frac{1}{2}E$ だけのエネルギーをもっている”

（ii）“1本の磁力線は，単位長さについて $\frac{1}{2}B/\mu_0$ だけのエネルギーをもっている”

（iii）“電気力線と磁力線が交わるところでは，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}/\mu_0$ だけのエネルギーが，面積 dS を通して単位時間に流れている”

慣性の流れの密度

$$\boldsymbol{J}^{(\mathrm{elm})}(x)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{3.4 a}$$

と，Maxwell の応力テンソル

$$-t_{ij}^{(\mathrm{elm})}(x)=\varepsilon_0E_i(x)E_j(x)+\frac{1}{\mu_0}B_i(x)B_j(x) -\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right) \tag{3.4 b}$$

は，やはり荷電粒子のないところで

（i）“電気力線と磁力線の交わるところでは，単位面積に $\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ だけの慣性の流れがある”

(ii)　“電気力線に沿った面には，球対称な圧力 $\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2$ が働いている”

(iii)　“磁力線に沿った面には，球対称な圧力 $\frac{1}{2}B^2/\mu_0$ が働いている”

また，

(iv)　“1本の電気力線に沿って，張力 E が働いている”

(v)　“1本の磁力線に沿って，張力 B/μ_0 が働いている”

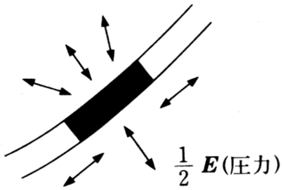


図3.2

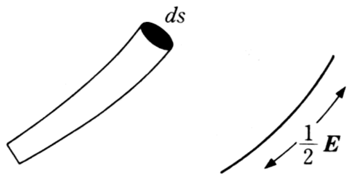


図3.3

上のような表現の意味をみるためには，電気力線からなる無限小の束を考えるとよい．束の断面積を $d\boldsymbol{S}$ とすると，$d\boldsymbol{S}$ は電場の方向を向いているから，明らかに，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{S}=E(x)\,dS \tag{3.5}$$

したがって，

$$\begin{aligned} -t_{ij}^{(\mathrm{elm})}(x)\,dS_j &= \varepsilon_0 E_i(x)\,E_j(x)\,dS_j-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x)\,dS_i \\ &= \varepsilon_0 E_i(x)\,E(x)\,dS-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E(x)\,E(x)\,dS_i \end{aligned} \tag{3.6}$$

右辺第1項が張力，第2項は等方的圧力からきている．電場と $d\boldsymbol{S}$ が同じ方向を向いていることを考慮すると，張力と圧力の合計は，

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E(x)\,E(x)\,dS_i \tag{3.7}$$

となるから，各電気力線に対して差し引き $\frac{1}{2}E$ だけの面を引っ張る張力が働いていることになる．いいかえると，力線は，縦の方向に縮もうとし，横の方向

には膨らもうとする.この張力と圧力が平衡して力線を一定の形に保っている.

§4 Fourier 変換

前節の直観的な力線のイメージとは反対に，次に，電磁場を空間変数についてFourier変換してみよう.そうすると，以前に導入した横成分，縦成分の意味がはっきりするだけでなく，力学的な手法，たとえば，LagrangianやHamiltonianの理論を，電磁場にも応用できるようになる．これは，やがて電磁場を量子論的に取り扱う準備でもある.ここで使うFourier変換は,表面上やや複雑にみえるが，三次元のFourier変換にすぎない．ただし，ベクトル場のFourier変換だから，Fourier係数がベクトルになる．そのベクトルを3個の直交した単位ベクトルでまた展開するだけのことである.

物理的な描線をはっきりさせるためには，電磁場の全体系を，一辺がLの大きな立方体の中に入れて考えるのがよい.立方体の体積はいうまでもなく$V=L^3$である．そうして，周期的境界条件を課すると，すぐFourier展開できて，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.8}$$

および

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.9}$$

となる.ただし，Fourier係数は複素数ベクトルである.また和は周期的境界条件を満たすために，

$$\boldsymbol{k}\equiv\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}\qquad \boldsymbol{n}=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.10}$$

のすべての$\boldsymbol{n}$についての3重の和である．Fourier係数は両方ともベクトルだから，それらを3個の単位ベクトル$\boldsymbol{e}^{(1)}$，$\boldsymbol{e}^{(2)}$，$\boldsymbol{e}^{(3)}$で展開し，

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}(t)\equiv\sum_{r=1}^{3}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\,p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}(t)\equiv-i\sum_{r=1,2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\,q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \tag{3.12}$$

とすると便利である．ただし，3個の単位ベクトルとして図3.4のようにとる.

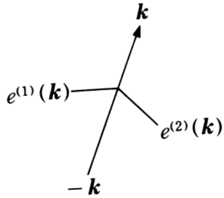


図 3.4

これらのベクトルの間には，直交条件

$$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}^{(s)}(\boldsymbol{k})=\delta_{rs} \tag{3.13 a}$$

と完全性条件

$$\sum_{r=1}^{3}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})\,e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})=\sum_{r=1,2}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})\,e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})+e_i^{(3)}(\boldsymbol{k})\,e_j^{(3)}(\boldsymbol{k})$$

$$=\sum_{r=1,2}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})\,e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})+\frac{1}{k^2}k_ik_j=\delta_{ij} \tag{3.13 b}$$

とが，各 $\boldsymbol{k}$ について成り立つ．また次の関係はあとで重要になる：

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})\,e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right\}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}=\left\{\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3.13 c}$$

右辺の記号的表現は，Fourier 変換で理解する．

(3.12) を採用したのは，磁場が横成分しかもっていないことを考慮してのことである．

Fourier 成分の，$\boldsymbol{k}$ の方向を向いたのが**縦成分**，$\boldsymbol{k}$ と垂直なのが**横成分**である．$e^{(1)}(\boldsymbol{k})$ と $e^{(2)}(\boldsymbol{k})$ は，$\boldsymbol{k}$ と垂直である．したがって，横成分は $e^{(1)}(\boldsymbol{k})$ と $e^{(2)}(\boldsymbol{k})$，または $\boldsymbol{k}\times e^{(r)}(\boldsymbol{k})$ $(r=1,2)$ しか含まない．$\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)}$ を偏極ベクトルという．

(3.11)，(3.12) をそれぞれ電場と磁場の式 (3.8)，(3.9) に代入すると，

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}^{3}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\,p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.14}$$

または，縦と横の成分を別々にして，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k})\,p_{\boldsymbol{k}}^{(3)}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.15 a}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\,p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.15 b}$$

および，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\,q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.16}$$

となる．両式の左辺は実数だから，$-\boldsymbol{k}$ の成分に対しても同じベクトル $e^{(1)}(\boldsymbol{k})$ と $e^{(2)}(\boldsymbol{k})$ を用いて展開すると，Fourier 係数は，

$$p_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t)=p_{-\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \qquad (r=1,2) \tag{3.17 a}$$

$$p_{\boldsymbol{k}}^{(3)*}(t)=-p_{-\boldsymbol{k}}^{(3)}(t) \tag{3.17 b}$$

および

$$q_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t)=p_{-\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \qquad (r=1,2) \tag{3.18}$$

を満たしていなければならない．

(3.15)，(3.16) に現れた Fourier 係数で Maxwell の方程式を書きなおすと，意外に簡単になる．そうする前にディメンションを調べておこう．

(1.49 b)，(1.42 b) により，

$$[\varepsilon_0]=\frac{(\mathrm{coulomb})^2}{\mathrm{newton}\ (\mathrm{meter})^2} \tag{3.19}$$

$$[E]=\frac{\mathrm{newton}}{\mathrm{coulomb}} \tag{3.20}$$

したがって，

$$[\sqrt{\varepsilon_0}\,E]=\frac{(\mathrm{newton})^{\frac{1}{2}}}{L} \tag{3.21}$$

これと (3.15) の右辺とを比較すると，

$$[p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}]=M^{\frac{1}{2}}LT^{-1} \tag{3.22}$$

となり，ちょうどエネルギーの平方根になっている．同様にして，

$$[q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}]=M^{\frac{1}{2}}LT^{-1}\cdot T=M^{\frac{1}{2}}L \tag{3.23}$$

であって，両方とも力学的なディメンションをもち，(3.22) と (3.23) の積は角運動量の次元になることに注意しよう．

§5　Fourier 係数と Maxwell の方程式

第1章の（1.20）〜(1.23) まで戻って，それらに（3.15）および（3.16）を代入し，Fourier の逆変換を施すと，Coulomb の法則（1.20）は，

$$|\boldsymbol{k}|p_{\boldsymbol{k}}^{(3)}(t)=-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\int_V d^3x\rho(\boldsymbol{x},t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.24}$$

となる．(3.24) は，Coulomb 場の式 (1.24) と同等である．それを Fourier 変換した式にすぎない．

磁場の時間的変化と電場の回転との関係を示す，物理的に重大な関係，Faraday の電磁誘導の法則（1.21）は，数学的には簡単に，

$$p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=\dot{q}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\qquad (r=1,2) \tag{3.25}$$

となる．ドットは，例によって，時間微分である．

(1.22) からは，電荷，電流の保存則によって，(3.24) を時間で微分した式と，

$$\begin{aligned}\dot{p}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)+c^2\boldsymbol{k}^2q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)&=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\int_V d^3x\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x,t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\int_V d^3x\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x,t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$(r=1,2)$$

が得られる．

(3.25) と（3.26）を見たときすぐ気がついたと思うが，これらは，(3.26) の右辺，つまり横型電流によって強制振動を受けている，角振動数 $\omega_{\boldsymbol{k}}=c|\boldsymbol{k}|$ をもった調和振動子である (それをみるには，(3.25) の時間微分をとって (3.26) に代入してみればよい)．したがって，これらの Fourier 係数を一般化座標として解析力学の手法を駆使することができる．第5章でそれを展開する．

【蛇足】

電磁場は横型電流によって強制された調和振動子の集まりに帰せられたが，いったいそれらの調和振動子は，空間のどこに散らばっているのだろうか？　調和振動子はいくつあるのだろうか？　という疑問が出るかもしれない．前者に対しては，Fourier 変換論の構造を考えてみればよい．たとえば（3.8）を眺めてみると，空間に依存する電場が，

波数ベクトルの和で与えられている．これに Fourier の逆変換をすると，

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}(t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{V}}\int_V d^3x\boldsymbol{E}(x,t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.27}$$

となり，今度は空間積分が出てくる．調和振動子の一般化座標 $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}(t)$ は，いろいろな場所の電場を寄せ集めたものである．これは，波に対する不確定関係の現れである．定まった波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を問題にするときは，波がどこにあるかと問うことを断念しなければならない．点 $\boldsymbol{x}$ における場を問題にするときには，その場の波数をシャープに指定できない．この不確定関係は，量子力学で初めて出てきたものではなく，古典論でも場を問題にするかぎり出てくる．ただし古典場の理論では，波数ベクトルと位置の間の関係で，運動量と位置の間の関係ではないから深刻ではないのである．量子力学では，いままでの古典力学では，運動量と位置を同時に正確に測ることができることがわかっていたため，ことが深刻になったわけである．

第2の疑問，調和振動子はいくつあるのか？　これもやはり，Fourier 変換（3.8）に戻って考えなければならない．その式の中の和は，(3.10)で与えられる可能な数だけの項にわたった和である．したがって，調和振動子は（3.10）で与えられる可能な数（それに，その後に出てきた横波の偏りの数2をかけたもの）だけ存在する．つまり，無限個ある．これは，場というものが，力学的な言葉でいうと，無限の自由度をもっているということである．調和振動子が全体で無限個あることはわかったが，実際に調和振動子を取り扱うときには，波数 $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$ の間に何個あるかを知らなければならない．この計算はあとで行うが，まずここで演習問題として，自分でやってみてほしい．

§6　調和振動子による電磁場のエネルギーと慣性

ついでだから，ここで，電磁場のエネルギー(2.11 a)を調和振動子の座標で書いてみよう．全空間に含まれる電磁場のエネルギーを問題にする．

(2.11 a) を全空間にわたって積分したものを，

$$\begin{aligned}H^{(\mathrm{em})}&\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V d^3x\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\boldsymbol{B}^2(x)\\&=\frac{1}{2}\int_V d^3x\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}{}^2(x)+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\}+\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V d^3x\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}{}^2(x)\\&\equiv H_{\mathrm{rad}}+H_{\mathrm{Coul}}\end{aligned} \tag{3.28}$$

とおく．ここで，横成分と縦成分とは直交することを使った．

(3.15 b) および (3.16) を右辺第1項に代入し，

$$\frac{1}{V}\int_V d^3x e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \tag{3.29}$$

と直交条件（3.13 a）を用いて整理すると，

$$H_{\rm rad} = \frac{1}{2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{p_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t)\,p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) + \omega_k{}^2 q_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t)\,q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\right\} \tag{3.30 a}$$

となる．$\omega_k{}^2 = c^2\boldsymbol{k}^2$ である．また，(3.28)の右辺第2項は，(3.14)および(3.24)のために，

$$H_{\rm Coul} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} p_{\boldsymbol{k}}^{(3)*}(t)\,p_{\boldsymbol{k}}^{(3)}(t)$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x\int_V d^3x' \frac{\rho(\boldsymbol{x},t)\,\rho(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3.30 b}$$

となる．ここで，付録の（A.8.6）を利用した．

(3.30 b)のほうは，Coulomb のエネルギーであり，(3.30 a)のほうはまさしく調和振動子の Hamiltonian である．ここで，(3.30 a)のほうは，ただ相互作用を無視して，エネルギーを調和振動子の一般化座標で書いたというだけで，運動方程式（3.25）や（3.26）は全然使っていないことに注意．つまり，前章の終わりに議論した相互作用の項はまだ考慮されていない．

慣性(2.16 a)を全空間にわたって積分したものも，一般化座標で書くことができる．結果は，

$$\boldsymbol{G} = i\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\left\{p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\,q_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t)\right\} \tag{3.31}$$

となる（演習問題）．

次の章で，いろいろな電荷分布や電流の分布を考えて，Maxwell の方程式が意味するところを調べてみよう．

§7 ま　と　め

先に進む前に，いままでごたごたと述べてきたことをまとめておく．基本的な変数として，横型の電場 $\boldsymbol{E}_{\rm T}(x)$ と Coulomb ゲージのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_{\rm T}(x)$，および縦型の電場 $\boldsymbol{E}_{\rm L}(x)$ をとる．

横型電場とベクトルポテンシャルとは，

$$\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x) = -\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x) \tag{3.32}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}(x) = -c^2\nabla^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x) - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x) \tag{3.33}$$

で結ばれており，一方，縦型電場のほうは，スカラーポテンシャル A_0 によって，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x) = -\nabla A_0(x) \tag{3.34 a}$$

という形に書かれる．したがってスカラーポテンシャルは，

$$A_0(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}', t) + \mathrm{const.} \tag{3.34 b}$$

で与えられる．結果として，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{3.35 a}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{L}}(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(x) \tag{3.35 b}$$

が成り立つが，これらの2つの式は電荷，電流の保存則

$$\dot{\rho}(x) + \nabla\cdot(\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(x) + \boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(x)) = \dot{\rho}(x) + \nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}(x) = 0 \tag{3.36}$$

を考えると完全に独立ではない．(3.32) と (3.33) とからは，波動方程式 (2.44 b) が出る．

とにかく，これらの方程式から，与えられた電荷と電流に対してベクトルポテンシャルと縦型，横型の電場が決まると，

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x) \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(x) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \nabla\frac{\rho(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3.38}$$

によって全電場と磁場が得られる．

縦型の電場を別にすると，方程式 (3.32)，(3.33) のほうは，6個の未知量に対する6つの方程式だから取り扱いやすくなる．これらの量で電磁場の全エネルギー (3.28) を書くと，

$$H_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\int d^3x\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}{}^2(x) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x))\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x))\right\} \tag{3.39 a}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}{}^2(x) + \frac{1}{\mu_0}\partial_i A_{\mathrm{T}j}(x)\,\partial_i A_{\mathrm{T}j}(x)\right\} \tag{3.39 b}$$

$$H_{\text{Coul}}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3x\int d^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3.40}$$

となる．(3.39 a) から (3.39 b) にいくときには，部分積分と Coulomb ゲージの条件を使った．全慣性 (2.16 a) は，

$$\boldsymbol{G}=\int d^3x\,\boldsymbol{J}^{(\text{elm})}(x)=\varepsilon_0\int d^3x\Big\{\boldsymbol{E}_{\text{T}}(x)\times(\nabla\times\boldsymbol{A}_{\text{T}}(x))\Big\} \tag{3.41 a}$$

$$=\varepsilon_0\int d^3x\Big\{(E_{\text{T}j}(x)\nabla A_{\text{T}j}(x))-(\partial_j\boldsymbol{A}_{\text{T}}(x)\cdot E_{\text{T}j}(x))\Big\}$$

$$=\varepsilon_0\int d^3x\Big(E_{\text{T}j}(x)\nabla A_{\text{T}j}(x)\Big) \tag{3.41 b}$$

である．2 行目第 2 項は，部分積分と横波の条件を使って落とした．

【蛇足】

(1)　Lorentz ゲージの場合を，Coulomb ゲージをとったときのまとめ，(3.32)～(3.38) と同様に書くことはできるであろうか？

$$\dot{\boldsymbol{A}}(x)=-\boldsymbol{E}(x)-\nabla A_0(x) \tag{3.42}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}(x)=c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}(x))-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{J}(x) \tag{3.43}$$

$$\dot{A}_0(x)=-c^2\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) \tag{3.44}$$

だけでは，Coulomb の法則が出てこない．さて，どうしたらいいだろうか？

(2)　量子力学を学んだ人なら，運動量を表す式 (3.41 b) に ∇ が現れたのをみて感激したにちがいない．量子力学では，運動量は，

$$\boldsymbol{p}\ \to\ \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{3.45}$$

であった．さらに想像をたくましくすれば，(3.32)，(3.33) は強制された調和振動子の運動方程式に，(3.39 b) は調和振動子の Hamiltonian にみえてくるだろう．(3.34 a) と比べながらよく考えてみてください．強制された振動子の方程式は (3.25)，(3.26) に出てきた．

演　習　問　題　Ⅲ

1．（1.26）の Coulomb 場の力線を数学的に表現してみよ．

2．横型の電場に対して，（3.2）が，任意の閉じた曲面について成立することを証明せよ．磁場についても同じく任意の閉じた曲面について，同様な式が成り立つことを確かめよ．

3．電磁場が実数であることから，条件式（3.17），（3.18）を導け．

4．（3.24）を導いてみよ．

5．（3.26）を導け．

6．Faraday の電磁誘導の法則が（3.25）になることを確かめよ．

7．一般の波について，波数ベクトルと位置の間に成り立つ不確定関係を導け．

8．波数空間において，$(k_1,\ k_2,\ k_3)$ と $(k_1+dk_1,\ k_2+dk_2,\ k_3+dk_3)$ の間に，調和振動子はいくつあるか？

9．電磁場エネルギーの（3.28）から（3.30）を導け．

10．電磁場の慣性（2.16 a）から（3.31）を導け．

11．（3.32）と（3.33）とから，波動方程式（2.44 b）を導いてみよ．

12．Lorentz ゲージの式（3.42），（3.43），（3.44）に，スカラーポテンシャル A_0 の波動方程式（2.37 a）を加え，Coulomb の法則を導け．

第4章 特別の場合

§1 はじめに

いままで Maxwell の方程式から直接の，近似なしの結論を調べるために，特殊な事情やモデルや仮定はできるだけ避けてきた．そろそろ，昔習ったいろいろな電磁気の現象や法則が，どのようにして Maxwell の方程式から出てくるかを復習しなければならない．その目的のために，この章では，2，3 の非常に特別な場合を考える．ただしあまり細かい復習はやらない．それについては他の適当な参考書を参照されたい．

§2 磁場のない世界

もし磁場をゼロとおくならば，磁場のない世界になるが，そのとき Maxwell の方程式は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{4.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)=0 \tag{4.2}$$

$$0=\boldsymbol{J}(x)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial_t}\boldsymbol{E}(x) \tag{4.3}$$

となる．電場は完全に縦型になる．(4.1) と (4.3) は電荷と電流の間の連続の方程式を要求するだけである．(4.3) の電流はやはり縦型で，縦型電荷の時間微分と消し合う．したがって，この電流は磁場を生じない（次節をみよ）．

(4.1) を積分形になおすと，

$$\boldsymbol{E}(x)=-\nabla\phi(x) \tag{4.4 a}$$

ただし，

$$\phi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}',t) \tag{4.4 b}$$

である．そして，(4.2) は自動的に満たされる．積分はすべての電荷密度を包むような十分大きな体積にわたってやればよい．

方程式 (4.3) のために，このとき電流は縦型の (1.14) の形のものでなければならない．さもないと，電流によって磁場ができてしまう．

(例１) 原点における点電荷

これを数式で表すと，

$$\rho(x)=Q\delta(\boldsymbol{x}) \tag{4.5}$$

だから，(4.4 a) からただちに，

$$\boldsymbol{E}(x)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2} \tag{4.6}$$

電場は距離の２乗に反比例し，動径方向を向いている Coulomb 場である．

(例２) 半径 a の球内で一様な密度をもった電荷は，

$$\rho(x)=\frac{3Q}{4\pi a^3}\theta(a-r) \tag{4.7}$$

で表される．これは，まともに(4.4)を使うよりも，Gauss の積分定理を(4.1)に直接当てはめて，

$$\int_{\partial V}d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}(x)=\frac{3Q}{4\pi a^3\varepsilon_0}\int_V d^3x\theta(a-r) \tag{4.8}$$

と書く．電荷分布の対称性に目をつけると，電場は動径方向の成分しかなく，原点からの距離のみの関数であるから，まず，a より小さい半径の球を考えると，

$$4\pi r^2E(r)=\frac{Q}{a^3\varepsilon_0}r^3 \qquad (r<a) \tag{4.9}$$

$$\therefore \quad E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3} \tag{4.10}$$

同様に，

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad (r>a) \tag{4.11}$$

２つの式 (4.10) と (4.11) をいっしょにし，方向まで考慮すると，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}}\left\{\frac{r}{a^3}\theta(a-r)+\frac{1}{r^2}\theta(r-a)\right\} \tag{4.12}$$

となる．$r<a$ では，Q からの距離に比例し，$r>a$ では距離の 2 乗に逆比例している．ただし，対称性を使い，(4.4) を使わずに計算をした場合には，いつでも，(4.2) が成り立っていることを別に確認しておかなければならない．Gauss の積分定理を使わなくても，付録 (A.8.9) を使うと，(4.4) の積分はすぐできる（演習問題）．

（例 3）　x-y 平面上に分布した一様な面密度 σ は，

$$\rho(\boldsymbol{x})=\sigma\delta(z) \tag{4.13}$$

で与えられる．したがって電場は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_{-\infty}^{\infty}dx'dy'\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} \tag{4.14}$$

この積分は計算可能で，

$$E_x(\boldsymbol{x})=E_y(\boldsymbol{x})=0 \qquad E_z(\boldsymbol{x})=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|} \tag{4.15}$$

となる．σ が正ならば，$z>0$ では正の方向，$z<0$ では負の方向を向いている．

もし $z<0$ が金属で埋められていて電場が入れないようになっていると，

$$E_x(\boldsymbol{x})=E_y(\boldsymbol{x})=0 \qquad E_z(\boldsymbol{x})=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\theta(z) \tag{4.16}$$

となる．

(4.15) と (4.16) とは，x-y 面の上下に，面と平行な底辺をもつ円筒を考え，対称性を考慮して Gauss の積分定理を使っても計算できるが，そうしたときには (4.2) をチェックすることを忘れないように．

（例 4）　原点の辺りに局在した電荷 $\rho(\boldsymbol{x})$ から遠いところでの電場を求めるには，(4.4) に，付録の展開式 (A.11.3)

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+\frac{1}{2r^4}\left(3(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2-\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{x}'^2\right)+\cdots\right\} \tag{4.17}$$

を用いるとよい．すると，(4.4 b) は，

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left\{\int_V d^3x'\rho(\boldsymbol{x}')+\frac{1}{r^2}\left(\boldsymbol{x}\cdot\int_V d^3x'\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\right)\right.$$

$$+A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')+\cdots\Big\} \tag{4.18}$$

ただし，

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')=\frac{3}{2r^4}x_i x_j \int_V d^3x' \left(x'_i x'_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}\boldsymbol{x}'^2\right)\rho(\boldsymbol{x}') \tag{4.19}$$

である．

いま，全電荷

$$Q\equiv\int_V d^3x\rho(\boldsymbol{x}) \tag{4.20 a}$$

電気双極子能率

$$P_i\equiv\int_V d^3x x_i \rho(\boldsymbol{x}) \qquad (i=1, 2, 3) \tag{4.20 b}$$

電気四極子能率

$$Q_{ij}\equiv\int_V d^3x\left(x_i x_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}\boldsymbol{x}^2\right)\rho(\boldsymbol{x}) \qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{4.20 c}$$

などを定義すると，(4.18) は，

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{Q+\frac{1}{r}n_i P_i+\frac{3}{2r^2}n_i n_j Q_{ij}+\cdots\right\} \tag{4.21}$$

となる．ここに，

$$n_i\equiv\frac{x_i}{r} \qquad (i=1, 2, 3) \tag{4.22}$$

は，$\boldsymbol{x}$ 方向の単位ベクトルの成分である．展開(4.21)の右辺は，大きさの順序に並んでいるとは限らないことに注意．たとえば，

$$\rho(\boldsymbol{x})=e\delta\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)-e\delta\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right) \tag{4.23}$$

のように，正と負の電荷がずれて存在すると，

$$Q=0 \tag{4.24 a}$$

$$\boldsymbol{P}=e\boldsymbol{a} \tag{4.24 b}$$

$$Q_{ij}=0 \tag{4.24 c}$$

となり，第2項しか残らない．このほか，第3項しか残らないような電荷の分布もある．高次の項に進むに従って，細かい電荷の分布の構造が効いてくる．

ちょっと注意を要するのは，量 (4.20 b)，(4.20 c) などは，一般にはベクト

ルやテンソルではないということである．座標の原点のとり方によって，これらの量の値は変わる（演習問題）．

§3 電場のない世界

このときは，Maxwell の方程式は，

$$\rho(x)=0 \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.26}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x)=\mu_0\boldsymbol{J}(x) \tag{4.27}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.28}$$

となる．(4.25)によると，この世界には電荷はありえない．電荷が少しでもあると，縦型電場がどこかに生ずる．また，(4.26)によって，磁場は時間に依存できない．いいかえると，磁場の時間的変化は，必ず横型電場を生む．

(4.27) によると，電流はこの場合，必ず横型で，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x)=0 \tag{4.29}$$

を満たすようなものでなければならない．このとき (4.27) を積分形になおすと，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4.30}$$

となり，(4.28)は自動的に満たされる．電流の要素からの距離の 2 乗に逆比例して磁場は弱くなっている．これは Biot-Savart の式である．(4.30)の形から，縦型の電流が磁場を生まないことは明らかであろう．

この場合，(2.28) で導入したベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4.31}$$

を使うと便利である．これに，電場の場合と同じく展開式(A.11.4)を使うと，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})+\cdots \tag{4.32}$$

となる．細かい計算は省くが，

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x})\equiv\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')=0 \tag{4.33 a}$$

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int_V d^3x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{x}}{r^3} \tag{4.33 b}$$

$$\vdots$$

である．ただし，$\boldsymbol{M}$ というのは磁気双極子能率で，

$$\boldsymbol{M} \equiv \frac{1}{2}\int_V d^3x'\,\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4.34}$$

で定義される．この量は，座標の原点のとり方によらない．

さて，ここで重要な演習問題をやってもらわなければならない．それは，展開式 (4.21) の右辺第 2 項から電場を計算し，また (4.33 b) から磁場を計算し，両者を比較してほしいのである．そうすると，得られた $\boldsymbol{B}$ において，

$$\mu_0\boldsymbol{M} \;\rightarrow\; \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \tag{4.35}$$

というおきかえをするとちょうど $\boldsymbol{E}$ とまったく同じになることがわかる．これは何を意味するのだろうか？

(例 1)　z 軸に沿って流れている定常電流によってつくられる磁場を求めてみよう．電流は，

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}\delta(x)\delta(y) \tag{4.36}$$

で与えられる．ただし，

$$\boldsymbol{I} = (0, 0, I) \tag{4.37}$$

である．(4.31) によると，この場合のベクトルポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \tag{4.38}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\rho} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{y}{x^2+y^2},\ -\frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)\end{aligned} \tag{4.39}$$

が得られる．ρ とは，z 軸から点 $\boldsymbol{x}$ までの距離である．この磁場は，z 軸を中心にして右ねじの方向を向いた同心円を描いている．もちろん遠くにいくほど磁場は ρ に反比例して弱くなる．

(例 2)　次に z 軸に平行な 2 つの電流の間に働く力を計算してみよう.

前例の電流から距離 ρ だけ離れた点に，電流 $\boldsymbol{I}$ と平行に電流 $\boldsymbol{I}'$ を流したとすると，$\boldsymbol{I}'$ には $\boldsymbol{I}$ の磁場によって Lorentz の力が働く．その力は $\boldsymbol{I}'$ の単位長さに対して，

$$\boldsymbol{I}'\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\rho})=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{I}'\times(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\rho})=-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{I}'\cdot\boldsymbol{I}) \tag{4.40}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{I}'$ と $\boldsymbol{\rho}$ とが直交していることを使った．この式の右辺に負号がついていることが重要で，これは，同じ方向に走る電流は引き合い，反平行の電流は反発し合うことを示している（電荷の場合と逆）.

関係 (4.40) を用い，互いに 1 メートル離れた等しい電流の間の力が，単位長さについて，

$$f=2\times10^{-7}\,\text{newton}\,(\text{meter})^{-1} \tag{4.41}$$

であるとき，その電流を 1 ampare と決める.

(例 3)　次に，もう少し一般的な場合を考える.

空間の一点 $\boldsymbol{x}$ に電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ があり，また別の点 $\boldsymbol{y}$ に電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})$ があるとしよう．電流の方向はまったく勝手なものでよい．このとき，点 $\boldsymbol{x}$ にある電流要素 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\,d^3x$ が生ずる点 $\boldsymbol{y}$ での磁場は,

$$\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y})=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_y\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\,d^3x \tag{4.42}$$

である．これが点 $\boldsymbol{y}$ における電流要素に及ぼす力は,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{x\to y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d^3x\,d^3y&=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})\times\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,d^3y\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})\times\left(\nabla_y\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right)d^3x\,d^3y\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\nabla_y\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}))\right.\\&\qquad\left.-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\left(\nabla_y\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})\right)\right\}d^3x\,d^3y\end{aligned} \tag{4.43}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{y\to x}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d^3x\,d^3y&=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\times\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y})\,d^3x\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\nabla_x\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}))\right.\end{aligned}$$

$$-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})\left(\nabla_x\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right)\Big\}d^3x\,d^3y \tag{4.44}$$

両式の右辺第1項は互いに符号が逆で，作用は反作用に等しくなっているが，第2項はそうなっていない．では，電流の場合，なにか変なことが起きるだろうか？　ちょっと考えてみてほしい．答えのヒントは，電流が無限に伸びていることと，それが横型であるということである（演習問題）．

§4 静的な世界

Maxwellの方程式から，時間微分をすべて無視すると静的な世界

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \tag{4.45}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.46}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \tag{4.47}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.48}$$

へ到達する．相変わらず，電場と磁場は独立にふるまっている．(4.47)により電流は横型のみである．これらの式を満たす解は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}') \tag{4.49}$$

および

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4.50}$$

で，Coulombの法則とBiot-Savartの法則が成り立つ．(4.46)，(4.48)は自動的に満たされている．(4.49)と(4.50)によると，場は，電荷，電流の要素からの距離の2乗に逆比例している．

静的な世界での電磁場のエネルギーを計算してみよう．そのためには，積分公式

$$\int_V d^3x\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}$$

$$=-\int_V d^3x\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}$$

$$=4\pi\int_V d^3x\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}=4\pi\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|} \tag{4.51}$$

を使うと便利である．ただし，この公式を使う場合には，部分積分を何度かやって，表面の寄与をおとすから，被積分関数の遠くでのふるまいに気をつけなければいけない．この公式を使うと，電場（4.49）に関しては（3.30）と同じ結果が出る．磁場（4.50）のほうの計算はもう少しやっかいで，ベクトル解析の公式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{4.52}$$

と上の(4.51)を併用する．さらに，電流が横型であることに注意して計算すると，電場のほうといっしょにして，全体で，

$$E_{\text{static}}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_V d^3x\int_V d^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}+\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V d^3x\int_V d^3x'\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{4.53}$$

となる．これをみても，静的な横型の電流（磁場を作る電流）の要素の間には，全体としては，Coulomb 力が働いているような結果になっている．ただし，前節の終わりで計算したように，各電流要素の間に Coulomb 力が働いているわけではないことには注意しておかなければならない．事実，静的でない場合にはこんなに簡単にはならない．

【蛇足】

電場と磁場をどうやって測定したらよいだろうか？　電場のほうは，素性のよくわかった試験電荷 q を用いればよいだろう．q が静止しているときにそれに働く力 $\boldsymbol{F}$ を測って，それを q でわれば電場の強さが得られる．ただし，q が動くと電流が生じ磁場も関与してくるから，それを避けるために，試験電荷の質量を大きくして，q の動きを抑えておかないと電場の測定が正確にできない．

さて，磁場のほうはどうやって測ればよいだろうか？　電流に働く力として，磁場を測定できるであろうか？　結果をいうと，たった1つの電流を使ったのではそれはできない．互いに直交した3つの電流があると磁場が測定できる．事情はこうである．

Lorentz の力によると，磁場は，単位長さの電流 $\boldsymbol{I}$ に

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{4.54}$$

だけの力を及ぼす．明らかに，$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ から $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ を決めることは不可能である．$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{I}$ 方向への成分はこの式に寄与しないから，それだけ不定なのである．

そこで，互いに直交する3つの電流を $\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{I}_3$ としよう．簡単のため電流はすべて1に規格化してあるとすると，

$$(\boldsymbol{I}_i\cdot\boldsymbol{I}_j)=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,3)\tag{4.55}$$

が成り立つ．各電流に働く力

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{I}_i\times\boldsymbol{B}\qquad(i=1,2,3)\tag{4.56}$$

がわかったとき，

$$F_{ijk}\equiv\boldsymbol{I}_i\cdot(\boldsymbol{I}_j\times\boldsymbol{F}_k)=\delta_{ik}(\boldsymbol{I}_j\cdot\boldsymbol{B})-\delta_{jk}(\boldsymbol{I}_i\cdot\boldsymbol{B})\tag{4.57}$$

を作る．すると，

$$(\boldsymbol{I}_1\cdot\boldsymbol{B})=F_{212}=F_{313}\tag{4.58 a}$$

$$(\boldsymbol{I}_2\cdot\boldsymbol{B})=F_{323}=F_{121}\tag{4.58 b}$$

$$(\boldsymbol{I}_3\cdot\boldsymbol{B})=F_{131}=F_{232}\tag{4.58 c}$$

である．右辺は測定によってわかった量だから，これらから，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=F_{212}\boldsymbol{I}_1+F_{323}\boldsymbol{I}_2+F_{131}\boldsymbol{I}_3\tag{4.59}$$

が得られる．実際に地球物理学者が，こんなことをしながら歩き回って地球磁場を測っているのかどうか私は知らない．

§5　電荷と電流の分布と場

時間に依存する電荷や電流から場を決めるという問題は，結局のところ，電磁場に対する式 (2.21)，(2.22) か，強制された調和振動子の式 (3.26) を積分するか，あるいは，第2章§6で導入したベクトルとスカラーのポテンシャルをまず求め，それらから場を計算するかに帰する．

まず，スカラーとベクトルのポテンシャルを求めてみよう．Lorentz ゲージを採用すると，ポテンシャルは (2.37 a)，(2.37 b) で決まる．場は (2.28) および (2.30) で与えられる．(2.37) を積分するには，付録の Green 関数 (A.9.1)

$$D^{(\mathrm{ret})}(x-x')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\delta(ct-ct'-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)\tag{4.60}$$

を利用する．そうするとポテンシャルは，

$$A_0(x)=A_0^{(0)}(x)-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x'D^{(\mathrm{ret})}(x-x')\rho(x')\tag{4.61 a}$$

ここで，時間積分を先にやると，

$$= A_0^{(0)}(x) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\rho\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \tag{4.61 b}$$

同様に，

$$\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}^{(0)}(x) - \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' D^{(\mathrm{ret})}(x - x') \boldsymbol{J}(x') \tag{4.62 a}$$

$$= \boldsymbol{A}^{(0)}(x) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \tag{4.62 b}$$

というきれいな形になるが，右辺第 2 項に，電磁作用が有限の速度 c で伝播する遅延の効果が入っているから，$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ を求めるために微分をするとき，気をつけなければならない．また，時間積分は先にやらずにあとまで残しておいたほうが便利なこともある．(4.61)，(4.62) の右辺の第 1 項は，

$$\Box A_0^{(0)}(x) \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] A_0^{(0)}(x) = 0 \tag{4.63}$$

$$\Box \boldsymbol{A}^{(0)}(x) \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \boldsymbol{A}^{(0)}(x) = 0 \tag{4.64}$$

を満たす任意の解で，初期条件で決める．ただし，いまは Lorentz ゲージをとっているから，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}^{(0)}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} A^{(0)}(x) = 0 \tag{4.65}$$

という条件をつけておかなければならない．

上の表示 (4.61)，(4.62) から，まず，電場と磁場を求めておこう．それには公式

$$\begin{aligned}\nabla&\left\{\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} f\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right)\right\} \\ &= \nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\right) \cdot f\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right) \\ &\quad - \frac{1}{c}\nabla|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \cdot \frac{\partial}{\partial t} f\left(\boldsymbol{x}', t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right)\end{aligned} \tag{4.66}$$

を使うと便利である．これを使うと，場の定義 (2.28)，(2.30) によりただちに，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{x},t)&+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\rho(\boldsymbol{x}',\tau)\\&+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\int d^3x'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau)\cdot\nabla')\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}\\&-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau)\right.\\&\left.-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau)\right)\right\}\end{aligned}\tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{B}^{(0)}(\boldsymbol{x},t)&-\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}\\&\times\left\{\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right\}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau)\end{aligned}\tag{4.68}$$

ただし,

$$\tau\equiv t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\tag{4.69}$$

である. (4.67), (4.68) は, ベクトルポテンシャルを経ないでも直接 (2.21), (2.22) を積分しても得られる (演習問題). これらは近似なしの正確な式である.

右辺をみれば明らかなように, 電流が時間に依存しなければ, §3 の静的な場合に帰する. しかも, 電流の時間的な変化を含む項は含まない項に比べ, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ が余計にかかっている. したがって, うんと遠くのほうでは, 電流の時間微分を含む項が重要になる. これは, 遅延時間のために (4.66) の右辺第 2 項が効いているからである.

§6 原点の辺りに局在する電流の作る場

前節の (4.67), (4.68) は, 両式の右辺第 1 項は別として, 与えられた電荷と電流の分布によって定まる電磁場の正確な式である. この節では図 4.1 のように, 電荷と電流が原点0のまわりの半径 a の領域の中に限られているとき, 原点からずっと離れた点 $\boldsymbol{x}$ での電磁場を計算してみる. 空間・時間図形でいうと図4.2のような場合である. 斜線の部分に電荷, 電流が限られている. 右上の点 P での電磁場は, 電荷, 電流の太線 AB の部分で決まる. その作用が横波

となって光速度で，つまり 45 度傾いた線を伝わって点 P に到達する．その空間依存性は $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}$ である．一方，縦電場のほうは，太線 DE の部分の影響が $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-2}$ で点 P まで伸びている．

いま，

$$\rho(\boldsymbol{x}', t)=0 \qquad |\boldsymbol{x}'|>a \tag{4.70}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t)=0 \qquad |\boldsymbol{x}'|>a \tag{4.71}$$

とし，原点から遠くの点

$$|\boldsymbol{x}|\gg a>|\boldsymbol{x}'| \tag{4.72}$$

を考える．$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}$ に対して展開式 (A.11.3) を使うと (4.67) からただちに，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)-\boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t)\\
&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{<a}d^3x'\{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}', \tau)-\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{n}'\cdot\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}', \tau))\}\\
&\quad+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{c}{r^2}\int_{<a}d^3x'\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', \tau)-2\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', \tau))\}\\
&\quad-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\int_{<a}d^3x'(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}', \tau)-\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{n}'\cdot\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}', \tau))\}\\
&\quad+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_{<a}d^3x'\boldsymbol{n}'\rho(\boldsymbol{x}', \tau)+O\left(\frac{1}{r^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

が得られる．記号は明らかと思うが，

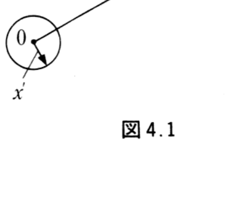


図 4.1

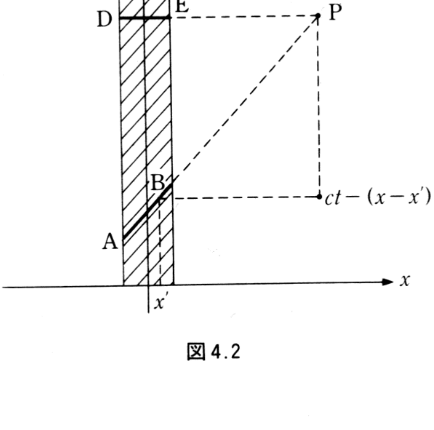


図 4.2

$$\boldsymbol{n}' \equiv \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{4.74 a}$$

$$\tau \equiv t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \tag{4.74 b}$$

$$\boldsymbol{n} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \tag{4.74 c}$$

$$r \equiv |\boldsymbol{x}| \tag{4.74 d}$$

である．

(4.73) の右辺第2項が第1項より小さいのは，

$$r \gg c|\boldsymbol{J}|/|\dot{\boldsymbol{J}}| \tag{4.75}$$

が成り立つような場合で，電流の時間的変化が激しいほど，遠くにいくほど，第2項以下の寄与は小さくなる．たとえば，$\boldsymbol{J}$ が一定の角振動数 $\omega=ck$ で振動しているなら，波長を λ とするとき (4.75) は，

$$r \gg c/\omega = \frac{\lambda}{2\pi} \tag{4.75$'$}$$

となる．いいかえると，電流の発振する電磁波の波長に比べ，ずっと遠方では (4.73) の右辺第1項が圧倒的に大きく，それ以外の項を無視してもよい．

$$\left.\begin{array}{l} r \gg c|\boldsymbol{J}|/|\dot{\boldsymbol{J}}| \\ r \gg a \end{array}\right\} \tag{4.76}$$

を満足し，第1項だけが重要な領域を**波動帯** (wave zone) とよぶ．

波動帯においては $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ の差は無視できるから，$\boldsymbol{n}'$ を $\boldsymbol{n}$ でおきかえて

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{<a} d^3x'\{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}',\tau) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}',\tau))\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.77}$$

を得る．この式の τ は

$$\tau \approx t - \frac{r}{c} \tag{4.78}$$

で近似しよう（図 4.2 および (A.11.6) をみて考えよ．これは電気双極子近似といわれるものである)．

まったく同様の条件のもとに，つまり波動帯での磁場は (4.68) より，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{B}^{(0)}(\boldsymbol{x},t)$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\int_{<a}d^3x'\,\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}',\tau)+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.79}$$

となる．

いま，電流の，$\boldsymbol{n}$ に垂直な成分の和を

$$\boldsymbol{J}_\perp(\tau)\equiv\int_{<a}d^3x'\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau)-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau))\} \tag{4.80}$$

とおくと，明らかに，

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}_\perp(\tau)=\boldsymbol{n}\times\int_{<a}d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau) \tag{4.81}$$

かつ，ベクトルの公式（4.52）により，

$$|\boldsymbol{J}_\perp(\tau)|=|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}_\perp(\tau)| \tag{4.82}$$

したがって波動帯における電場と磁場とは，

$$\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\boldsymbol{J}}_\perp(\tau) \tag{4.83}$$

$$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{J}}_\perp(\tau) \tag{4.84}$$

であって，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{E}^{(1)}$ と $\boldsymbol{B}^{(1)}$ は互いに垂直で，右手系を作っている．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の右肩につけた 1 という数は，電流からの距離の逆べきを意味する（図 4.3）．

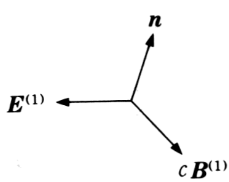


図 4.3

波動帯でどれだけエネルギーが流れているかを計算するのは比較的簡単である．この場合のエネルギーの流れは（2.11 b）により，

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$$

$$=\frac{\mu_0}{(4\pi)^2}\frac{1}{c}\frac{1}{r^2}\dot{\boldsymbol{J}}_\perp\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{J}}_\perp)=\frac{\mu_0}{(4\pi)^2}\frac{1}{c}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{J}}_\perp{}^2(\tau) \tag{4.85}$$

である．波の伝播方向に垂直な電流の成分だけが関与していることに注意して

ほしい．これを半径 r の球にわたって表面積分すると，波動帯における全エネルギーの流れが求まる．

いま，

$$\boldsymbol{J}(\tau)\equiv\int_{<a}d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',\tau) \tag{4.86}$$

と $\boldsymbol{n}$ のなす角を θ とすると，

$$|\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{J}}(\tau)|=|\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{J}}_\perp(\tau)|=\dot{\boldsymbol{J}}(\tau)\sin\theta \tag{4.87}$$

だから，(4.85) より，全エネルギーの流れは，

$$R(t)\equiv\int d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\mu_0}{(4\pi)^2}\frac{1}{c}\frac{1}{r^2}\dot{\boldsymbol{J}}_\perp{}^2(\tau)=\frac{\mu_0}{(4\pi)^2}\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{J}}_\perp{}^2(\tau)\,d\Omega$$

$$=\frac{\mu_0}{(4\pi)^2}\frac{1}{c}\dot{J}^2(\tau)\sin^2\theta d\Omega \tag{4.88}$$

となる．$d\Omega$ は $d\boldsymbol{S}$ が原点に対して張る立体角で，

$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi \tag{4.89}$$

である．(4.85)～(4.88) には，遅延時間が入っていることに注意．

演習問題として，z 軸上のアンテナ

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=\frac{\pi}{a}\frac{I}{\omega_a}\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)\sin(\omega_a t)\,\delta(x)\,\delta(y) \tag{4.90 a}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=(0,0,I)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)\cos(\omega_a t)\,\delta(x)\,\delta(y) \tag{4.90 b}$$

による輻射を計算してみられたい．a はアンテナの長さで，

$$a\geq z\geq 0 \tag{4.91}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\omega_a}c\gg a \tag{4.92}$$

とする．

§7 Fourier 変換による輻射の取り扱い

第3章で説明した，電磁場の Fourier 変換による方程式(3.25)，(3.26)でも同じように，時間的に動く電流による電磁場を計算することができる．解くべき方程式は，強制された調和振動子のもの

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\omega_{\boldsymbol{k}}{}^2\right]q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \qquad (r=1,2) \tag{4.93}$$

であって，この解が求まれば (3.25)，(3.15 b)，(3.16) から電磁場がわかる．ただし，

$$I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{V}}\int_V d^3x\,\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.94}$$

である．

(A.9.7) の Green 関数を使うと (4.93) は，

$$q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=\overset{0}{q}{}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,G_{\boldsymbol{k}}(t-t')\,I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t') \tag{4.95}$$

と書ける．ただし頭に 0 のついた q とは，(4.93)の右辺をゼロとおいた方程式の解であり，初期値で決まる．電磁波の散乱を取り扱う場合にはこれが入射波を表す．ここでは入射波はないとして以下この項は考えない．また，

$$\begin{aligned}G_{\boldsymbol{k}}(t-t')&=\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\sin\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')\,\theta(t-t')\\&=\frac{-i}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\{\exp[i\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')]-\exp[-i\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')]\}\,\theta(t-t')\end{aligned} \tag{4.96}$$

である．

(3.25) によると，この場合，

$$q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{t}dt'\frac{\sin\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')}{\omega_{\boldsymbol{k}}}I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t') \tag{4.96$'$}$$

$$p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=\dot{q}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{t}dt'\cos\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')\,I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t') \tag{4.97}$$

である．

電流によって発射される全エネルギーを計算するには，(3.30 a) を使うとよい．そうすると，

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{rad}}(t)=&\frac{1}{2\varepsilon_0{}^2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\iint_{-\infty}^{t}dt'\,dt''\\&\times\{\cos\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')\cos\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t'')+\sin\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')\sin\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t'')\}\\&\times I_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t')\,I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t'')\\=&\frac{1}{2\varepsilon_0{}^2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\iint_{-\infty}^{t}dt'\,dt''\cos\omega_{\boldsymbol{k}}(t'-t'')\,I_{\boldsymbol{k}}^{(r)*}(t')\,I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t'')\end{aligned} \tag{4.98}$$

となり，いうまでもなく時間に依存している．近似なしにいけるのはここまでである．単位時間にどれだけのエネルギーが発射されたかを知るためには，これを時間で微分してみればよいわけだが，そうしてもあまり役に立たない．バランス方程式 (2.12) まで戻って，右辺のエネルギーの流れを計算しても原理的にはよいはずだが，これも簡単にはできない．

そこで，正の角振動数 ω_a で

$$I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\cos\omega_a t \tag{4.99}$$

のように振動している電流に話を限ろう．すると (4.98) は，

$$H_{\mathrm{rad}}(t)=\frac{1}{2\varepsilon_0{}^2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\iint_{-\infty}^{t}dt'\,dt''\cos\omega_k(t'-t'')\cos\omega_a t'\cos\omega_a t''|I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}|^2 \tag{4.100}$$

となる．角振動数 ω_a が正であることを考慮し，かつ長い時間

$$t\gg\frac{2\pi}{\omega_a} \tag{4.101}$$

を問題にし，積分の上限を無限大へもっていくと，

$$\iint_{-\infty}^{\infty}dt'\,dt''\cos\omega_k(t'-t'')\cos\omega_a t'\cos\omega_a t''=\frac{\pi}{2}\delta(\omega_k-\omega_a)\int_{-\infty}^{\infty}dt \tag{4.102}$$

したがって，

$$H_{\mathrm{rad}}(\infty)=\frac{\pi}{4\varepsilon_0{}^2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega_a-\omega_k)|I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}|^2\int_{-\infty}^{\infty}dt \tag{4.103}$$

という表現が得られる．最後の時間積分は，放射にかかった全時間だから，単位時間に放射されたエネルギーは，

$$R=\frac{H_{\mathrm{rad}}(\infty)}{\int_{-\infty}^{\infty}dt}=\frac{\pi}{4\varepsilon_0{}^2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega_a-\omega_k)|I_{\boldsymbol{k}}^{(r)}|^2 \tag{4.104}$$

となる．デルタ関数のために，発射される電磁波は電流と同じ角振動数をもつ．

(4.94) を使って元の電流に書きかえると，

$$\begin{aligned}R&=\frac{\pi}{4\varepsilon_0}\frac{1}{V}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega_a-\omega_k)\left|\int d^3x\,\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},0)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right|^2\\&=\frac{\pi}{4\varepsilon_0}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega_a-\omega_k)\left|\int d^3x\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\times\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},0)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right|^2\end{aligned} \tag{4.105}$$

である．ここで偏極ベクトルの完全性条件 (3.13 b) および (4.80)，(4.81) と

類似の関係を用いて電流の全体 $\boldsymbol{J}$ に書きなおした．そこで，

$$\boldsymbol{n}_k \equiv \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{4.106}$$

という単位ベクトルを導入し，

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega_k}{c}\boldsymbol{n}_k \tag{4.107}$$

と書く．次に $\boldsymbol{k}$ についての和を実行しなければならない．そのために，V が大きいときに成り立つ関係

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} \cdots = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega \int dk\, k^2 \cdots = \frac{1}{(2\pi c)^3}\int d\Omega \int d\omega\, \omega^2 \cdots \tag{4.108}$$

を使って ω の積分を行う（これは $\boldsymbol{n}_k$ の方向とは無関係に実行できる．(4.108) については，次の章§7をみよ）．結果は，

$$R = \frac{\pi\omega_a{}^2}{4(2\pi c)^3\varepsilon_0}\int d\Omega \left| \int d^3x\, \boldsymbol{n}_k \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, 0) \exp\left(-i\frac{\omega_a}{c}\boldsymbol{n}_k \cdot x\right) \right|^2 \tag{4.109}$$

となる．

前にあげた電流 (4.90 b) の場合には，電流が z 方向を向いているから，波の方向となす角を θ とすると，

$$|\boldsymbol{n}_k \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, 0)| = |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, 0)| \sin\theta \tag{4.110}$$

である．したがって (θ, ϕ) の方向への放射の割合は，

$$dR = \frac{\pi\omega_a{}^2}{4(2\pi c)^3\varepsilon_0} \left| \int d^3x\, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, 0) \exp\left(-i\frac{\omega_a}{c}\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{x}\right) \right|^2 \sin^2\theta\, d\Omega \tag{4.111}$$

となる．電磁波発射の割合は，電流の角振動数の 2 乗に比例している．

電磁波が最も強く発射される方向は，もし ω_a/c が小さくて (4.92) の条件が満たされているならば，(4.111) の積分の中の指数関数は 1 とおくことができるので，角への依存性は，$\sin^2\theta$ だけとなる．そのときには，電流から垂直の方向，x-y 平面に出ていく割合が大きい．

指数関数を 1 とはおけないような短い波長を問題にする場合には，ことは複雑になる．

§8　点電荷による電磁場

前々節の議論は，原点の辺りに局在している電荷と電流に話を限ったため，たとえば点粒子の位置ベクトルが $\boldsymbol{\xi}(t)$ で与えられている場合には，そのままでは適用できない．(4.67)，(4.68) は正確な式だから，原理的には，それらの式に

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = e\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \tag{4.112 a}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) = e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \tag{4.112 b}$$

を代入して積分すれば，この場合の電磁場が得られるはずである．しかし，遅延時間のために，$\boldsymbol{x}'$ についての積分が意外に困難である．点粒子の場合は，むしろベクトルポテンシャルの (4.61 a)，(4.62 a) を用いて，まず $\boldsymbol{x}'$ について の積分を実行して，それからあとで t' についての積分をするほうが容易である．スカラーポテンシャルについて説明すると：　(4.61 a) から ($A_0^{(0)}(x)$ はゼロとして)，

$$A_0(x) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} c dt' \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\delta(ct - ct' - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|)\,\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{\xi}(t'))$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{\xi}(t')|}\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t')|\right) \tag{4.113}$$

そこで，デルタ関数の性質

$$\delta(f(t')) = \frac{1}{|f'(t_1)|}\delta(t' - t_1) \tag{4.114}$$

を利用する．ただし，t_1 とは，

$$f(t_1) = 0 \tag{4.115}$$

の根であって，この場合には，

$$t - t_1 - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1)| = 0 \tag{4.116}$$

だから，粒子が逆行しないかぎり 1 つしか根がない (図 4.4 から判断せよ)．(4.116) によると，t_1 は t と $\boldsymbol{x}$ の関数であり，このことはポテンシャルか

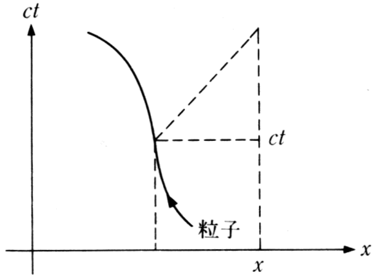


図 4.4

ら電磁場を求めるとき大変重要になる．(4.114) の分母に対応するものは，

$$1-\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1))\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1))=1-\boldsymbol{n}(t_1)\cdot\boldsymbol{\beta}(t_1) \tag{4.117}$$

である．ただし，

$$\boldsymbol{n}(t_1)\equiv\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|} \tag{4.118}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t_1)\equiv\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1) \tag{4.119}$$

とした．

$$\beta_{\mathrm{R}}(t_1)\equiv\boldsymbol{n}(t_1)\cdot\boldsymbol{\beta}(t_1) \tag{4.119$'$}$$

は，点粒子が時刻 t_1 において $\boldsymbol{x}$ 方向に向かって進んでくる速さを光速度 c でわったもので，1 よりはるかに小さい．これを用いると，

$$dt'\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t')|\right)=\frac{1}{1-\beta_{\mathrm{R}}(t_1)}\delta(t'-t_1)\,dt' \tag{4.120}$$

だから，結局

$$\begin{aligned}A_0(x)&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\delta(t'-t_1)\frac{1}{1-\beta_{\mathrm{R}}(t')}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{\xi}(t')|}\\&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1-\beta_{\mathrm{R}}(t_1)}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|}\end{aligned} \tag{4.121}$$

となる．まったく同様にしてベクトルポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{c}{1-\beta_{\mathrm{R}}(t_1)}\frac{\boldsymbol{\beta}(t_1)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|} \tag{4.122}$$

となる．これらを，Lienard-Wiechert のポテンシャルとよぶ．

【注意】

（1）　(4.121)，(4.122) の右辺はすべてゲージ不変な量で書かれている．したがって(4.121)，(4.122) はゲージ変換を受けない．それは，$A_0^{(0)}(x)$ や $\boldsymbol{A}^{(0)}(x)$ をゼロとおいたことが，ゲージを決めてしまったからである．

（2）　$\beta_R(t_1)$ は，粒子が点 $\boldsymbol{x}$ に向かってくる速度だから，点 $\boldsymbol{x}$ へ近づいてくる粒子はあたかも電荷が大きく，

$$\frac{e}{1-\beta_R(t_1)}>e \tag{4.123}$$

になったようにみえる．一方，点 $\boldsymbol{x}$ から遠ざかる粒子は，$\beta_R(t_1)$ が負であるから，あたかも電荷が小さく，

$$\frac{e}{1-\beta_R(t_1)}<e \tag{4.124}$$

になったようにみえるはずである．星の明るさなどを問題にするときに注意すべきことである．ただし，ここでは Newton 力学に従う粒子を考えているから，上の式を文字通り速度のあまり大きな領域まで拡張してはいけない．

ポテンシャルがわかると，それらを式

$$\boldsymbol{E}(x)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x)-\nabla A_0(x) \tag{4.125}$$

$$\boldsymbol{B}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}(x) \tag{4.126}$$

に代入すれば電磁場が決まる．結果をまず書くと，

$$\boldsymbol{E}(x)=-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\frac{1}{(1-\beta_R)}\left\{(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})+(1-\beta_R)\dot{\boldsymbol{\beta}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}(1-\beta^2)(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\right\}\right]_{t_1} \tag{4.127}$$

および，

$$\boldsymbol{B}(x)=-\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\frac{1}{(1-\beta_R)}\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta}+(1-\beta_R)\dot{\boldsymbol{\beta}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}(1-\beta^2)\boldsymbol{\beta}\right\}\right]_{t_1} \tag{4.128}$$

という複雑なものになる．右辺の量はすべて，(4.116) で決まる遅延時間 t_1 における ものである．この複雑さは，遅延時間が $\boldsymbol{x}$ と t の関数であることからきているが，その事情はあとで説明することにし，まず電磁場の特徴をまとめておくと：

（i）両式は近似によらない正確なものである．

（ii）$\boldsymbol{\beta}$ の時間微分が入っていない項は，$\boldsymbol{\xi}(t_1)$ からの距離の 2 乗に反比例している．

（iii）$\boldsymbol{\beta}$ の時間微分が入った項，つまり加速度に関係した項は，$\boldsymbol{\xi}(t_1)$ からの距離に反比例している．したがって，遠方ではこの寄与が大きくなる．かつ，この項は $\boldsymbol{n}(t_1)$ と直交している．

（iv）常に，

$$c\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{n}(t_1)\times\boldsymbol{E}(x) \tag{4.129}$$

が成り立っている．しかし，

（v）

$$\boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{n}(t_1)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|^2}\frac{1-\beta^2(t_1)}{(1-\beta_R(t_1))^2} \tag{4.130}$$

$$\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{n}(t_1)=0 \tag{4.131}$$

だから，あまり遠くないところでは，電場には縦成分が混ざっている．ただし，波動帯では $\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{n}$ と直交している．

さて，ポテンシャル (4.121)，(4.122) を (4.125)，(4.126) に代入して，電磁場の表示 (4.127)，(4.128) の結果を得る計算の概略を示すと次のようになる．前に注意したように，t_1 は t と $\boldsymbol{x}$ の関数だから遅延時間 (4.116) から，

$$\nabla t_1=-\frac{1}{c}\frac{1}{1-\beta_R(t_1)}\boldsymbol{n}(t_1) \tag{4.132}$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial t}=\frac{1}{1-\beta_R(t_1)} \tag{4.133}$$

である．以下，いちいち (t_1) と書くのを省くと，

$$\nabla=\nabla_{\text{exp}}+\nabla t_1\cdot\frac{\partial}{\partial t_1}=\left(\nabla_{\text{exp}}-\frac{1}{c}\frac{1}{1-\beta_R}\boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial t_1}\right) \tag{4.134}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial t_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_1}=\frac{1}{1-\beta_R}\frac{\partial}{\partial t_1} \tag{4.135}$$

また，定義から，

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt_1}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|=-\beta_R \tag{4.136}$$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt_1}\boldsymbol{n}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\{\boldsymbol{n}\beta_R-\boldsymbol{\beta}\} \tag{4.137 a}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}) \tag{4.137 b}$$

$$\nabla_{\mathrm{exp}}\beta_R=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n}\beta_R\} \tag{4.138 a}$$

$$=-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}) \tag{4.138 b}$$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt_1}\beta_R=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\{\beta_R{}^2-\beta^2\}+\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} \tag{4.139}$$

これらを使って，じっくりと計算すると電磁場（4.127），（4.128）が得られる（これは決してむずかしくはないが，えらく神経をつかう計算である．他人のいうことを信用しないで是非自分でやってみるように．ついでながら，ここにくるまでに，書斎の隅の紙屑籠が何度いっぱいになっただろうか？）．

荷電粒子が加速することによって電磁波を発射することを，**制動輻射** (Bremsstrahlung) という．

制動輻射のエネルギーの流れを計算すると，

$$\boldsymbol{S}(x)=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)=\frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{n}(t_1)\boldsymbol{E}^2(x) \tag{4.140 a}$$

$$=\frac{1}{\mu_0 c^3}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{(1-\beta_R(t_1))^6}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|^2}\times[\boldsymbol{n}(t_1)\times\{(\boldsymbol{n}(t_1)-\boldsymbol{\beta}(t_1))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t_1)\}]^2 \tag{4.140 b}$$

となる．これは波動帯における正確な式である．半径

$$r\equiv|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)| \tag{4.141}$$

の球にわたって面積分すると，単位時間にこの球を通過するエネルギーが得られる．それは，

$$R(t)=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega\frac{[\boldsymbol{n}(t_1)\times\{(\boldsymbol{n}(t_1)-\boldsymbol{\beta}(t_1))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t_1)\}]^2}{(1-\beta_{\mathrm{R}}(t_1))^6} \tag{4.142}$$

である．ただし，これは半径 r の球面を，時刻 t に通過するエネルギーであって，粒子がこれだけのエネルギーを発射したのは実は，時刻 t_1 においてであった．だから，これを「粒子が単位時間に発射したエネルギー」と同一視してはいけない．粒子が発射したエネルギーが知りたかったら，

$$dt=\frac{dt}{dt_1}dt_1=(1-\beta_{\mathrm{R}}(t_1))\,dt_1 \tag{4.143}$$

を使って,「粒子の単位時間」になおしてやらなければならない．いずれにしろ，光速度に比べて小さい速度の粒子を問題にするときには，(4.142) は，そんなことには関係なく

$$\begin{aligned}R(t)&=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega[\boldsymbol{n}(t_1)\times\{\boldsymbol{n}(t_1)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t_1)\}]^2\\&=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega\{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2(t_1)-(\boldsymbol{n}(t_1)\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(t_1))^2\}\end{aligned} \tag{4.144}$$

で近似される．

この式を使うと，原子核のまわりを回転している古典的な電子が失うエネルギーなどが計算できる（演習問題）．

§9 その他の問題

古典電磁気学で議論される問題にはそのほか限りがないが，あとで量子論的に得られた結果と比較するために必要なものを最後に簡単に復習しておく．式の導出はいちいちやらない．問題とやり方の説明と結果だけをはっきり書いておくことにする．詳細は適当な演習書を参照されたい．

（1） 荷電粒子の自己場

前節の計算は，荷電の外に発射される電磁場に関するものであった．荷電粒子が電磁波を発射するとそれだけエネルギーが減っていくから，そのことが粒子自身の運動を制限する．それを，荷電粒子への**輻射の反作用**という．

輻射の反作用の計算では，粒子の近辺を問題にしなければならないから，§6 の計算とは違い，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ は ct に比べて小さいとして展開する．また，粒子自身

に働く反作用は，一般には，粒子の速度や加速度などの複雑な関数になるが，それらについて線型の項だけを採用する．そうすると，まず，粒子にかかるLorentzの力のうち，磁場のほうは考えなくてよい（(4.128) をみよ）．

いま，荷電粒子が半径 a_0 の剛体球であるとすると，粒子内部の電荷の各部分が互いに相互作用し，発散積分が出てくるが，これらの積分はすべて a_0 で切断することにする．すると，

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2\boldsymbol{\xi}(t)}{dt^2} &= \int d^3x\,\rho(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\boldsymbol{x},t) \\
&\quad\times\left[\nabla\left\{\frac{\rho\left(\boldsymbol{x}',t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}J\left(\boldsymbol{x}',t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\boldsymbol{x},t) \\
&\quad\times|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{n-1}\rho(\boldsymbol{x}',t)\frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}}\boldsymbol{\xi}(t)+\text{nonlinear terms} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\frac{4}{3c^2}\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{2}{3}\boldsymbol{\xi}^{(3)}(t) \\
&\quad-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}a_n\boldsymbol{\xi}^{(n+2)}(t)+\text{nonlinear terms}
\end{aligned}
\tag{4.145}
$$

ただし，

$$
a_n\equiv\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x\int d^3x'\,\rho(\boldsymbol{x},t)\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{n-1}\rho(\boldsymbol{x}',t) \tag{4.146}
$$

とした．

(4.145)の右辺第1項には a_0 が含まれているが，これは，(4.146)の $n=0$ の積分からきた切断である．切断は，だいたい，古典電子半径

$$
r_0=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \tag{4.147}
$$

くらいにとっておけばよいだろうと考えられる．この項は，電子の加速度に比例しているから，左辺に移項すれば，電子の運動方程式は近似的に，

$$m_{\mathrm{obs}}\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\xi}(t)=\frac{m_{\mathrm{obs}}}{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{d^3}{dt^3}\boldsymbol{\xi}(t)+\cdots \tag{4.148}$$

となる．ただし，

$$m_{\mathrm{obs}}\equiv m+\frac{4}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 c^2}=m+\frac{4}{3}m \tag{4.149}$$

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{D}}}\equiv\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{m_{\mathrm{obs}}} \tag{4.150}$$

である．(4.149)は，発散積分を a_0 で切断し，無理に $a_0=r_0$ とおいた結果出てきたものだから，数値を真正直にとってはいけない．m_{obs} 全体が観測される電子の質量であるということ以上の意味はない．

(4.148)の右辺は，電子の運動を減衰させる働きをもち，減衰項とよばれる．$1/\omega_{\mathrm{D}}$ は時間の次元をもっている．この項が運動の減衰として働くことは，以下の項で明らかになる．

【蛇足】

静的エネルギーの (4.53) に，点電荷密度 (4.112 a) を代入して積分を遂行すると，分母に $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ があるために結果は発散する．そこで天下りに，点 $\boldsymbol{x}$ と点 $\boldsymbol{x}'$ とは，

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=\frac{a_0}{2} \tag{4.151}$$

までしか近寄れないとすると，

$$E_{\mathrm{static}}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a_0}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \tag{4.152}$$

となる．これは，荷電粒子のまわりの Coulomb 場の全エネルギーである．この(4.152)をまた天下りに mc^2 とおくと，古典電子半径 (4.147) の r_0 が得られる．(4.152) と，(4.149) の真ん中の項とを比べてみるとおもしろい．ただし，この問題にあまり深く首を突っ込まないように．これは，自己エネルギーの問題として知られている難問中の難問なのである．

電流，電荷分布は電磁気力だけでは安定に存在しえない．だから，電子の中にも電磁気以外の力が働いていないかぎり，電子は電子として安定でありえない．電磁気力だけで安定が実現されるためには，Lorentz の力がいたるところでゼロにならなければならない．それは実は不可能なのである（演習問題）．

(4.149) のように，はじめにあった質量 m とこのわけのわからない項との和が実際に観測される電子の質量であると解釈しておいて話を進めるのがくりこみ理論の精神である．くりこみ理論はもちろんそれだけではないが．

また，(4.146) ($n>1$) を点粒子について真正直に計算するとゼロになる．

（2） 電磁波の散乱

外部から電磁波が入射し，点粒子を同じ振動数で揺すって同じ振動数の2次的な電磁波が出る現象を，電磁波の散乱という．2次的な電磁波の放射には，粒子の速度が遅いとき，前節での計算，とくに（4.144），（4.109），（4.88）がそのまま当てはまる．そうして，この議論によると，2次的な波の振動数は，入射波の振動数とまったく同じである．

まず，入射波の取り扱い方を述べると： 散乱問題では，入射波を複素数で，

$$\boldsymbol{E}e^{-i\omega t}=\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\sin\omega t\}+i\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\cos\omega t-\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\sin\omega t\} \qquad (4.153)$$

と表現しておくと便利である．ただし，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ とは，それぞれ $\boldsymbol{E}$ の実部と虚部である．

たとえば，（4.153）の実部の2乗は，

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\sin\omega t\}^2\\&=\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}{}^2\cos^2\omega t+\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}{}^2\sin^2\omega t+2(\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}})\sin\omega t\cos\omega t\end{aligned} \qquad (4.154)$$

右辺の最後の項は，実部と虚部の干渉を示す．これを1周期にわたって平均すると，

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}dt\begin{Bmatrix}\cos^2\omega t\\ \sin^2\omega t\end{Bmatrix}=\frac{1}{2} \qquad (4.155\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}dt\sin\omega t\cos\omega t=0 \qquad (4.155\,\mathrm{b})$$

のために，干渉項は消える．したがって，時間平均をバーで表すと，

$$\overline{\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\sin\omega t\}^2}=\frac{1}{2}\{E_{\mathrm{R}}{}^2+E_{\mathrm{I}}{}^2\}=\frac{1}{2}(Ee^{-i\omega t})\cdot(Ee^{-i\omega t})^* \qquad (4.156)$$

となる．右辺にはバーをつけなくてもよいということに注意されたい．つまり，（4.156）によると，電磁場に対して複素表示（4.153）をとり，そのまま計算を進めると，結果として，実数表示の計算の時間的な平均の2倍が得られる．このことを利用すれば，散乱の計算のように，主に，電磁場の量の2乗の時間平均を知りたいときには，複素表現を用いるほうが手間がかからない．

たとえば，入射波が（4.153）の実部で与えられているとすると，その Poynting ベクトルは，

$$\boldsymbol{S}_{\text{in}}=\frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{n}_0\{\boldsymbol{E}_{\text{R}}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{\text{I}}\sin\omega t\}\cdot\{\boldsymbol{E}_{\text{R}}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{\text{I}}\sin\omega t\}$$

$$=\frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{n}_0\{E_{\text{R}}{}^2\cos^2\omega t+E_{\text{I}}{}^2\sin^2\omega t+2(\boldsymbol{E}_{\text{R}}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{I}})\sin\omega t\cos\omega t\} \tag{4.157}$$

$\boldsymbol{n}_0$ は入射波の方向の単位ベクトルである．したがって，その時間平均は，

$$\overline{\boldsymbol{S}_{\text{in}}}=\frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{n}_0\{E_{\text{R}}{}^2+E_{\text{I}}{}^2\}=\frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{n}_0\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}e^{-i\omega t})\cdot(\boldsymbol{E}e^{-i\omega t})^*$$

$$=\frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{n}_0\frac{1}{2}|\boldsymbol{E}|^2 \tag{4.158}$$

となる．

荷電粒子が入射波によって揺すられて発射する電磁波のエネルギーの流れは，(4.144)，(4.104) または (4.88) によって求められる．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\equiv\overline{\frac{dR}{d\Omega}}\Big/|\overline{\boldsymbol{S}_{\text{in}}}| \tag{4.159}$$

を，散乱の微分断面積とよぶ．この量の計算では，1/2 の因子は分母と分子で消し合うから，そのことは忘れて，複素表示のままで計算を進めてかまわない．

散乱の微分断面積は，したがって，(4.144) によると，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2c^3|\boldsymbol{E}|^2}\overline{|\boldsymbol{n}_k\times(\boldsymbol{n}_k\times\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t_1))|^2} \tag{4.160}$$

(4.109) によると，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\omega^2}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2c|\boldsymbol{E}|^2}\overline{\left|\int d^3x\boldsymbol{n}_k\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},0)\right|^2} \tag{4.161}$$

ただし，この式では，電流にかかる指数関数をおとした(電気双極子近似)．また，(4.88) によると，同じく電気双極子近似で，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\mu_0{}^2}{16\pi^2|\boldsymbol{E}|^2}\overline{|\dot{J}(\tau)|^2}\sin^2\theta \tag{4.162}$$

となる．これらの式では，電流や $\boldsymbol{\xi}$ に対して複素表現を採用しておかなければならない．また，これらの式は，時間的変化のあまり速い粒子などには適用できない．

(例) Rayleigh 散乱，Thomson 散乱

角振動数 ω_0 で振動している荷電粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{\xi}$ とする．これに，入

射波（4.153）が当たったときの運動方程式は，複素表現で，

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}+\omega_0{}^2\right]\boldsymbol{\xi}(t)=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}e^{-i\omega t} \tag{4.163}$$

ここで，話をなるべく一般的にするために，左辺第2項の減衰項を入れた（(4.148) の減衰項とは別物．これらの差については演習問題）．しかし，電磁波と速度の遅い荷電粒子との相互作用では，Lorentz 力の磁場の項は，$\boldsymbol{v}/c$ のオーダーだから，無視してしまった．

(4.163) はすぐ解けて，

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\frac{e}{m}\frac{\boldsymbol{E}}{\omega_0{}^2-\omega^2-i\omega\gamma}e^{-i\omega t} \tag{4.164}$$

したがって，(4.160) により微分断面積は，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right]^2\frac{\omega^4}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\frac{(\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{n})^2+(\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{n})^2}{E_{\mathrm{R}}{}^2+E_{\mathrm{I}}{}^2} \tag{4.165}$$

となる．これが Rayleigh 散乱の微分断面積の公式である．入射波の角振動数が ω_0 に等しいとき，断面積は最大になる．

この式で，ω_0 をゼロとおくと，自由な荷電粒子による散乱の微分断面積が得られる．とくに，減衰項もゼロとおくと，Thomson 散乱の微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right]^2\frac{(\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{n})^2+(\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{n})^2}{E_{\mathrm{R}}{}^2+E_{\mathrm{I}}{}^2} \tag{4.166}$$

になる．入射波の偏りについて平均すると，よく知られた

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right]^2\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{4.167}$$

が出てくる．ここで，θ とは，入射波と散乱波のなす角である．

粒子の速度が大きいと，相対論的な議論が必要になるばかりでなく，そこでは，入射波と散乱波は異なった振動数をもつ．これが，電磁波の粒子性を示す重要な実験事実である．この問題を取り扱うためには，古典論の枠内で無理をするより，Dirac 方程式を使って，Compton 散乱に対する Klein–Nishina の式を直接導くほうが賢明である．

(3) 物質の中の電磁場

方程式 (4.163) を考えたついでに，物質の中の電磁場について，簡単に議論

しておきたい．物質の中の電磁場は本当は量子論的物性論の対象であって，それを古典論の範囲で理解しようと思ったら，ハンドウェイビングな議論にならざるをえない．それをまず覚悟しておこう．

物質に，比較的弱い電磁場がかかっている場合，物質中の荷電粒子のふるまいを，自由な荷電粒子，電気双極子能率密度 $\boldsymbol{P}(x)$ と磁気双極子密度 $\boldsymbol{M}(x)$ で代表させる．それらによる電荷と電流密度を，

$$\rho(x)=\rho_{\mathrm{F}}(x)-\nabla\cdot\boldsymbol{P}(x) \tag{4.168 a}$$

$$\boldsymbol{J}(x)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{F}}(x)+\dot{\boldsymbol{P}}(x)+\nabla\times\boldsymbol{M}(x) \tag{4.168 b}$$

と書く．$\boldsymbol{P}(x)$ や $\boldsymbol{M}(x)$ の項は，それら自身で連続の方程式を満たす．(4.168) を Maxwell の方程式 (1.1)～(1.4) に代入し，整理すると，

$$\nabla\cdot\left\{\boldsymbol{E}(x)+\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}(x)\right\}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{\mathrm{F}}(x) \tag{4.169 a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.169 b}$$

$$\nabla\times\{\boldsymbol{B}(x)-\mu_0\boldsymbol{M}(x)\}=\mu_0\left\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{F}}(x)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E}(x)+\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}(x)\right)\right\} \tag{4.169 c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.169 d}$$

と書くことができる．物質中の電磁場を取り扱うには，

$$\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)+\boldsymbol{P}(x)\equiv\boldsymbol{D}(x) \tag{4.170 a}$$

$$\boldsymbol{B}(x)-\mu_0\boldsymbol{M}(x)\equiv\mu_0\boldsymbol{H}(x) \tag{4.170 b}$$

を定義し，Maxwell の方程式を，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(x)=\rho_{\mathrm{F}}(x) \tag{4.171 a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.171 b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(x)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{F}}(x)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(x) \tag{4.171 c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.171 d}$$

と書く．このままでは，単に (4.170) の量を定義して Maxwell の方程式を書きなおしただけで，ご利益は何もない．しかし，もし電磁場が弱くて，しかも物質が均一なときには，(4.170) の量はそれぞれ $\boldsymbol{E}(x)$ と $\boldsymbol{B}(x)$ に比例し，

$$\boldsymbol{D}(x) = \varepsilon \boldsymbol{E}(x) \tag{4.172 a}$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \mu \boldsymbol{H}(x) \tag{4.172 b}$$

と書くことができる．物質中の電磁場は，したがって，(4.171) と (4.172) とを連立させて解くことに帰する．ε と μ とは物質に固有な定数で，それぞれ，物質のもつ**誘電率**，**透磁率**といわれる．

関係 (4.172) は，物質が均一でなかったり，入射電磁波の角振動数に依存したりして，一般的にはもっと複雑になる．また，たとえば (4.170 a) で定義された $\boldsymbol{D}(x)$ が，$\boldsymbol{E}(x)$ について非線型になることすら起こる．いずれにしろ定義はあくまで (4.170) であり，(4.172) は均一な物質が示す，ほとんど静的な電磁場に対する現象論的な応答関係にすぎない．事実，この線型関係は，物質中の電荷が，ごくあらっぽくいって，方程式 (4.163) を満たしているとすると，古典論の枠内でもある程度正当化される．それを考えてみよう．

方程式 (4.163) の解は (4.164) で与えられるから，物質中の i 番目の粒子の電気双極子能率は，

$$\boldsymbol{p}_i(t) \equiv e\boldsymbol{\xi}_i(t) = \frac{e^2}{m}\frac{\boldsymbol{E}e^{-i\omega t}}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i} \tag{4.173}$$

である．巨視的には無限小だが，微視的には大きい体積 v の中に，このような粒子が $n_i(v)$ 個あるとすると，点 $\boldsymbol{x}$ にある微視的な体積 v の全分極は，

$$\boldsymbol{P}(x) = \sum_i \frac{n_i(v)}{v}\boldsymbol{p}_i(t) \tag{4.174}$$

となり，右辺は明らかに電場に比例する．したがって，(4.174) を (4.170 a) に代入すると，$\boldsymbol{D}$ は $\boldsymbol{E}$ に比例することがわかる．

(4.174) の右辺は，角振動数 ω の電場に比例しているから，それを取り出して，

$$\boldsymbol{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \boldsymbol{E}(\omega) \tag{4.175}$$

と書き，$\chi(\omega)$ を**電気感受率** (electric susceptibility) という．分極の強さを表す．したがって，

$$\chi(\omega) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{v}\sum_i \frac{n_i(v)}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i} \tag{4.176}$$

で，これは複素数だが，(4.175) の両辺の実部を取り出して解釈する．通常は

実部と虚部とを分けて

$$\chi(\omega)=\chi'(\omega)+i\chi''(\omega) \tag{4.177}$$

と書く．すなわち

$$\chi'(\omega)=\frac{e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{v}\sum_i\frac{n_i(v)(\omega_i{}^2-\omega^2)}{(\omega_i{}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i{}^2} \tag{4.178 a}$$

$$\chi''(\omega)=\frac{e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{v}\sum_i\frac{n_i(v)\omega\gamma_i}{(\omega_i{}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i{}^2} \tag{4.178 b}$$

であるが，ω が特別の ω_i，たとえば ω_0 に近いときに，これらは大きな値をとる．かつ減衰項は，ω_i に比べて小さいから（4.178）は，

$$\chi'(\omega)\approx\frac{e^2}{2m\varepsilon_0}\frac{1}{v}\frac{n_0(v)(1-\omega/\omega_0)}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2} \tag{4.179 a}$$

$$\chi''(\omega)\approx\frac{e^2}{4m\varepsilon_0}\frac{1}{v}\frac{n_0(v)\gamma_0/\omega_0}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2} \tag{4.179 b}$$

と近似される．実部 χ' のほうは，電磁波の物質中での屈折率に関係しており，一方，虚部 χ'' のほうは，物質によって電磁波がどれだけ吸収されるかを示す．1つの i について図示すると，図 4.5 のようになる．

金属の内部では，Ohm の法則が成り立っていることはよく知られている．Ohm の法則は，電流の密度に対して，

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{F}}(x)=\sigma\boldsymbol{E}(x) \tag{4.180}$$

と表現される．つまり，物質中で自由に流れうる電荷による電流が電場 $\boldsymbol{E}(x)$

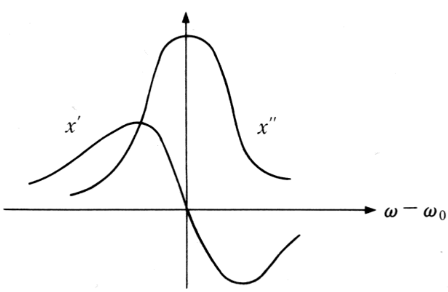


図 4.5

に比例する．この σ を，電気伝導率という．これは，物質に固有な量で，χ と同じく，電場の角振動数によったり，場が強くなると (4.180) の線型関係からずれてくることもある．以下，一応場は弱くて (4.172)，(4.180) が成り立つ範囲で考えよう．

この条件のもとに，金属の内部では Maxwell の方程式は，

$$\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x)=\rho_{\mathrm{F}}(x) \tag{4.181 a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.181 b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x)=\mu\sigma\boldsymbol{E}(x)+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x) \tag{4.181 c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.181 d}$$

である．電流，電荷の保存則は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{F}}(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{F}}(x)=\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{F}}(x)+\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x)=0 \tag{4.182}$$

で，これに (4.181 a) を使うと，金属内の電荷密度に対して方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{F}}(x)+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{F}}(x)=0 \tag{4.183}$$

$$\therefore\quad \rho_{\mathrm{F}}(x)=\rho_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{x})\exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}t\right) \tag{4.184}$$

が得られる．たとえば，銅では，ε と μ とは真空のものとほとんど変わりなく，常温で

$$\frac{\varepsilon}{\sigma}=0.15\times10^{-18}\,\mathrm{sec} \tag{4.185}$$

である．このような短い時間の間に，電荷は金属内の各点で初期値の e^{-1} に減ってしまう．現代の時間測定の限界は，だいたい 10^{-4}sec くらいであることを考えると，(4.185) は異常に短い．銅では，ほとんど瞬間的に電荷は消えてしまう．銅以外の金属でもだいたい同じオーダーである．したがって，金属中の電磁場を取り扱うときには，(4.181 a) の右辺ははじめからゼロとおいてかまわない．すると，(4.182) を組み合わせることによって，方程式

$$-\nabla^2\boldsymbol{E}(x)+\mu\sigma\dot{\boldsymbol{E}}(x)+\varepsilon\mu\ddot{\boldsymbol{E}}(x)=0 \tag{4.186 a}$$

$$-\nabla^2\boldsymbol{B}(x)+\mu\sigma\dot{\boldsymbol{B}}(x)+\varepsilon\mu\ddot{\boldsymbol{B}}(x)=0 \tag{4.186 b}$$

が得られる．金属の中の電磁場はこれらで記述されるが，導体，半導体以外を扱う場合には，$\sigma=0$ とおけばよい．自由空間での電磁波の方程式と比較して，その違いをよく頭に入れておいてほしい．調和振動子の言葉でいうと，σ がゼロでない物質中では，σ に比例した減衰力が働き，電磁波のエネルギーが Joule 熱として失われている．

$\sigma=0$ の物質では，電場がかかっても電流は起きず，ρ_F は動かない．まわりに電場を生じるだけである(ただし，単なる Coulomb 場ではないことに注意．なぜだろうか？)．

これらのことは，すべて，自ら手を使って確かめてほしい．

演習問題 IV

1．磁場のない世界では，任意の閉じた曲線について電場を積分したものはゼロになることを証明せよ．すなわち

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}(x)=0$$

したがって，e.m.f. はいつでもゼロである．ただし，$d\boldsymbol{s}$ とは閉じた曲線の線要素である．

2．電荷の分布（4.7）を（4.4 b）に代入し，直接電場を計算してみよ．

3．電荷の分布（4.13）に，Gauss の積分定理を用いて電場を求めてみよ．

4．もし全電荷がゼロならば，電気双極子能率 (4.20 b) は，座標の原点の取り方によらないことを示せ．

5．電気双極子能率の時間的変化は，座標の原点の取り方によらない．このことを確かめよ．

6．電気四極子能率は，全電荷と，電気双極子能率がゼロのとき，座標の原点の取り方によらないことを示せ．

7．定常電流

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=0$$

に対しては，

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3x\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=0$$

になることを証明せよ．

8．平面閉曲線に沿って流れる電流を $\boldsymbol{I}$ とし，平面曲線の囲む面積を A とするとき，この輪状電流の磁気双極子能率 $\boldsymbol{M}$ は，

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}A\boldsymbol{n}$$

で与えられることを示せ．ただし，$\boldsymbol{n}$ とは，平面閉曲線の単位法線である (電流の流れる方向へ右ねじを回したとき，ねじの進む方向)．

9．(4.21) の右辺第 2 項から電場を計算し，一方，(4.33 b) から磁場を計算して両者を比較せよ．

10．(4.43) と (4.44) を比べ，電流全体に対しては，作用と反作用が同じであることを確かめよ．

11．電磁場の静的なエネルギーは，(4.53) で与えられることを確認せよ．

12．Lorentz ゲージのベクトルポテンシャルは，(4.62)で与えられることを示せ．

13．電磁場を決める(4.67)，(4.68)を，ポテンシャルを経ないで直接(2.21)，(2.22) から導いてみよ．

14．(4.90) で与えられる電流により発射される輻射を計算せよ．

15．電流，電荷の分布は，電磁気的力だけでは安定でありえないことを証明せよ．

16．減衰項を考慮した式

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{d^3}{dt^3}+\omega_0{}^2\right]\boldsymbol{\xi}(t)=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}e^{-i\omega t}$$

を用いた場合，(4.163) による結果とどのように異なるだろうか？

17．物質中の電子が，速度に比例した抵抗力を受けるとして，Ohm の法則

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$$

を，古典的に導け(電気伝導率 σ は，単位体積中の電子の数 N，電子の電荷 $-e$，質量 m，抵抗力の関数で与えられる)．

18．物質にかかる電場が，角振動数 ω_0 で振動しているとき，その電気伝導率 $\sigma(\omega_0)$ を，同じく古典的に求めよ．

19．超伝導体の中では，ある温度以下で，電子の運動は抵抗を受けなくなる．このとき，Ohm の法則の代わりに，

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}=\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}$$

が成立することを示せ．

20．前問の結果と Maxwell の方程式を用い，超伝導体の中では，電場は表面にだけ存在しうることを証明せよ．

21．超伝導体の中では磁場はゼロである (Meissner 効果)．問題 19 の式と Maxwell の方程式から，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla\times\boldsymbol{J}+\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{B}\right\}=0$$

を導け．London の方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{J}+\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{B}=0$$

を初期条件にすると，外部磁場は超伝導体の中に侵入できないことを証明せよ．

22．(4.167)を全立体角にわたって積分すると，荷電粒子による電磁波散乱の全断面積になる．全散乱断面積を求めよ．

23．楕円偏光した電磁波の，自由電子による散乱微分断面積を求めよ(この場合，入射電場は $E=E_c\cos\omega t+E_s\sin\omega t$ である)．

24．古典電子半径は

$$r_0=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\frac{\hbar}{mc}=\alpha\frac{\hbar}{mc}$$

で与えられる．α は微細構造定数でその値は約 1/137 である．電子が半径 r_0 の剛体の球であると仮定し，それが回転して，角運動量 $\hbar/2$ をもつためには，電子はどれくらいの速さで回転しなければならないだろうか？　とくに電子の表面の速度を求めてみよ．

25．物質中に電流が流れると，電流の 2 乗に比例した，いわゆる Joule 熱が生じる．それを古典的に導いてみよ．

第5章 輻　射　場

§1 はじめに

いままでに調べてきたように，電磁気学の体系は，自己エネルギーの問題を別にすると，論理的にコンシステントである．(4.67) および (4.68) によって，電荷や電流の分布が与えられたときの電磁場が計算できる．また，調和振動子の表示（3.14），(3.16）の助けを借りると，電磁場の系の統計力学的な量も計算することができる（たとえば，拙著『統計力学入門』，講談社，130 頁）．

もう一度復習すると，次のようになっている．電場は縦成分 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}$ と横成分 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$ に分けられ，縦成分のほうは，電荷の分布からの距離の 2 乗に反比例した Coulomb 場を与える．磁場のほうはいつも横成分しかない．電場の横成分と磁場とは，(4.67)，(4.68) にみられるように，電流そのものと電流の時間微分を含む項から成り立っている．磁場の，電流そのものを含む項は，Biot-Savart の式を与える．電流の時間微分は，(4.66) によって，遅延時間から出てきたものである．同じく（4.66）からわかることは，電流の時間微分を含む項は，含まない項に比べ，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ が余分にかかっているから，電流から遠方で重要になる．とくに波動帯では，電流の時間微分を含む項が圧倒的になり，それは $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ に比例する．

電流の時間的変化によって放射されるエネルギーの割合は，前章の (4.144)，(4.109)，(4.88）で与えられる．それらを使うと，荷電粒子による電磁波の散乱も取り扱うことができる．電磁波散乱の微分断面積は（4.160)，(4.161)，(4.162）で与えられる．その機構は，荷電粒子が入射波によって同じ振動数で揺すられ，2 次的な電磁波を発射するというものである．したがって散乱波の振動数は常に入射波のものと同じである．

さて，この理論は，自己エネルギーの問題を除いて，論理的には一貫した体系ではあるが，前世紀の終わり頃から次々に発見された実験事実の中には，どうしてもこれでは説明できないものがあることがしだいにわかってきた．

第1には，電磁波の速度とは，いったい何に対する速度なのか？ という問題．第2には，原子の中の電子がなぜ電磁波を発射してエネルギーを失ってしまわないのか？ すなわち，原子の安定性の問題．第3に，よく知られた空洞輻射の問題である．空洞に閉じ込められた電磁場のエネルギーの分布が，高い振動数の領域で，実験から大きくずれる．第4には，いわゆる光電効果の問題がある．

よく知られているように，第1の問題は，1905年Einsteinの相対性理論によって解決された．第2の問題は量子力学を生むきっかけとなった．第3の問題は，Planckによって，作用量子の考えが導入され，第4の問題は，さらにEinsteinによって，光量子説へと発展させられた．これらの問題は『量子力学』（朝永振一郎著，みすず書房，第1巻）に詳しく分析されているから，是非読んでみられるように．

この章では，光量子論を学ぶための準備として，いままでの議論を再整備し，異なったふうに定式化する．光の粒子的な面を取り出すためには，いままで使ってきた $\boldsymbol{E}$ とか $\boldsymbol{B}$ とかは，あまり便利な変数ではない．第4章で導入した調和振動子の変数から，まず，振動子の振幅を表現する次元のない変数を導入する．そして，$|$振幅$|^2$ が光量子の数になるように，しかも，それがMaxwellの方程式と矛盾しないように定式化しなおす．粒子性の本質は，それが1個，2個，…と勘定できるということにある

§2 無次元の振幅変数

第3章で導入した調和振動子の変数 q や p はそれぞれ力学的な次元

$$[q]=M^{1/2}L \tag{5.1 a}$$

$$[p]=M^{1/2}LT^{-1} \tag{5.1 b}$$

をもっていたことを思い出そう．一方，Planckの定数を 2π で割ったものは，

$$[\hbar]=ML^2T^{-1} \tag{5.2 a}$$

かつ

$$[\omega]=T^{-1} \tag{5.2 b}$$

だから，調和振動子の振幅を表す無次元の複素変数 a と $a^\dagger$ を，

$$q_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\exp(-i\omega_k t)+a_{-\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)\exp(i\omega_k t)\} \tag{5.3 a}$$

$$p_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=-i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\exp(-i\omega_k t)-a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)\exp(i\omega_k t)\} \tag{5.3 b}$$

で定義する(拙著『物理数学ノート　I』，講談社，第V章をみよ)．ただし，ω_k は (5.2 b) の次元をもつかぎり勝手な定数でよい．しかし電磁場の場合は，

$$\omega_k=c|\boldsymbol{k}|\equiv ck \tag{5.4}$$

ととっておくとあとで便利である．また，(5.3) では Planck 定数を使ったが，これも (5.2 a) の次元をもつかぎり，いまのところまったく勝手な定数でよい．要は，(5.3) で定義した複素振幅変数 a と $a^\dagger$ が無次元であればよい．

まず，この表現が条件(3.17 a)，(3.18)を満たしていることは明らかである．そこで関係 (5.3) を，Fourier 変換の式 (3.15 b)，(3.16) に代入すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)=\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(-i\omega_k t)\\ -a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(i\omega_k t)\}\end{aligned} \tag{5.5 a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(x)=\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(-i\omega_k t)\\ -a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(i\omega_k t)\}\end{aligned} \tag{5.5 b}$$

となる．これらの量を与える，Coulomb ゲージのベクトルポテンシャルは，容易に確かめられるように

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(-i\omega_k t)\\ +a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(i\omega_k t)\}\end{aligned} \tag{5.5 c}$$

である．これらの表現では，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}$ が実量であることは一目瞭然である．また，これらを逆に解いて (Fourier の逆変換)，

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega_k V}}\exp(i\omega_k t)\int_V d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\left\{\frac{c^2}{\omega_k}\nabla\times\boldsymbol{B}(x)\right.$$

$$-i\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)\Big\}$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega_k V}}\exp(i\omega_k t)\int_V d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\{\omega_k\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)+i\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x)\} \tag{5.6 a}$$

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega_k V}}\exp(-i\omega_k t)\int_V d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\Big\{\frac{c^2}{\omega_k}\nabla\times\boldsymbol{B}(x)$$
$$+i\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)\Big\}$$
$$=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega_k V}}\exp(-i\omega_k t)\int_V d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\{\omega_k\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$$
$$-i\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x)\} \tag{5.6 b}$$

と書くこともできる．この逆変換の計算はやや煩雑だが，むずかしくはないから是非やってみられるように．

さて，表現 (5.6) を時間微分して，場の運動方程式 (3.33) または (2.42 b) を使うと，

$$\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\varepsilon_0 V}}\exp(i\omega_k t)\int_V d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x) \tag{5.7 a}$$

$$\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)=-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\varepsilon_0 V}}\exp(-i\omega_k t)\int_V d^3x\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x) \tag{5.7 b}$$

となる．これらが無次元振幅変数の満たす運動方程式である．これらは，強制された調和振動子の運動方程式 (3.26) から導くこともできる（演習問題）．ただし，ここで ω_k に関する関係式 (5.4) を使った．以下

$$f_{\boldsymbol{k}}(x)\equiv\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0 V}}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t) \tag{5.8}$$

とおくことにすると，振幅変数の運動方程式 (5.7) は，

$$\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=\frac{i}{\hbar}\int_V d^3x\, f^*(x)\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x) \tag{5.9 a}$$

$$\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_V d^3x\, f(x)\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x) \tag{5.9 b}$$

となる．これらを積分すると，

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t_0)+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\int_V d^3x'\, f_{\boldsymbol{k}}^*(x')\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x') \tag{5.10 a}$$

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)=a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t_0)-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\int_V d^3x' f_{\boldsymbol{k}}(x')\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x') \tag{5.10 b}$$

が得られる．これらは，振幅の初期値が時刻 t_0 で与えられたとき，任意の時刻 t における振幅を決める式である．

(5.9) あるいは (5.10) をみればすぐわかるように，もし電流がゼロならば，振幅変数は時間によらずに一定である．もし電流が時間に依存しないならば，どうであろうか（演習問題）？

§3　無次元振幅変数による物理量の表現

電磁場のエネルギー (3.30 a) や電磁場の慣性 (3.31) を，上に導入した無次元振幅変数で表してみると，その物理的意味および便利さが理解できる．

上の関係式 (5.3) を (3.30 a) と (3.31) に代入すると，

$$H_{\mathrm{rad}}(t)=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{G}(t)=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \tag{5.12}$$

これらをみてまず気がつくことは，次元が，

$$[H_{\mathrm{rad}}]=[\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}]=ML^2T^{-2}=\text{energy} \tag{5.13 a}$$

$$[\boldsymbol{G}]=[\hbar\boldsymbol{k}]=MLT^{-1}=\text{momentum} \tag{5.13 b}$$

であることである．電磁場の全エネルギーは，Coulomb エネルギーを除いて，$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ を，（調和振動子の振幅の 2 乗を表す）無次元の量

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\equiv N_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \tag{5.14}$$

倍したものになっている．同様に，電磁場の全慣性は，$\hbar\boldsymbol{k}$ に (5.14) をかけたものである．調和振動子の振幅の 2 乗 (5.14) は，したがって，電磁場にはエネルギー $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ がどれだけ含まれているか，また，電磁場には運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ がどれだけ含まれているかを示す量である．ここで，$\hbar=$(Planck の定数)$/2\pi$ ととると，$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ および $\hbar\boldsymbol{k}$ はまさに，それぞれ光量子のエネルギーと運動量になる．もし，振幅の 2 乗 (5.14) を光量子の数 $0, 1, 2, \cdots$ と解釈できるならば，上の議論はまさに光量子の理論になる，また，そうすれば，(5.11) はまさに Planck の求めたエネルギースペクトルになる．事実，エネルギーとして (5.11) をとり，

(5.14)が負でない整数だけをとるとして，正準集合の統計力学を使うと，黒体輻射に対するPlanckの分布式が，ピタリと出る（拙著『統計力学入門』，第IV章参照）．しかし残念ながら，このままでは，(5.14) は負でない整数だけをとるようになっていなくて，ゼロから正の無限大までの勝手な実数の値をとることができる．

そこですぐ考えつくのは，導入した無次元の振幅変数 a と $a^\dagger$ とをそれぞれ消滅，生成演算子とみなせば，拙著『物理数学ノートI』第V章の論議に従って，(5.14)という量は，整数値 $0, 1, 2, \cdots$ をとることになる．そうすれば，光量子論がすぐでき上がるのではないか？　しかし，そんな勝手なことをしていいものだろうか？　そうすることは，せっかく勉強したMaxwellの理論をだいなしにしてしまうのではなかろうか？

§4　Maxwell 方程式の確認

いったい，光量子を取り入れながらMaxwellの理論をどのような形式で保存したらよいであろうか？

場の横成分に関するかぎり，無次元変数に対する (5.7) あるいは (5.10) だけで十分Maxwell方程式は再現できる，

ということをまず確認しよう．この場合，第3章の終わりの論議，とくに(3.32)，(3.33) が重要である．

まず，(3.32) を確かめるために，(5.5 c) の時間微分をとると，

$$\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x)=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})[\{(\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)-i\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t))f_{\boldsymbol{k}}(x)\}+\{(\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)+i\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t))f_{\boldsymbol{k}}{}^*(x)\}] \tag{5.15 a}$$

この式の右辺の時間微分に対して (5.9) を用いると，2つの項は互いに消し合い（$\omega_{\boldsymbol{k}}$ が $c|\boldsymbol{k}|$ に等しいことを使う），

$$=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\{-i\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)f_{\boldsymbol{k}}(x)+i\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)f_{\boldsymbol{k}}{}^*(x)\}$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t)-a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\exp(i\omega_{\boldsymbol{k}}t)\}$$

$$= -\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x) \tag{5.15 b}$$

となる．したがって Faraday の電磁誘導の法則は成り立っている．

次に(3.33)を確認するためには，同様に(5.5 a)を時間微分して，また(5.7)を用いればよい．すると，うまい具合に関係（3.33）が得られる（演習問題）．したがって，Ampare-Maxwell の法則も，だいじょうぶである．

まとめると，われわれは，Maxwell の理論を保持するためには，(5.7) だけを考慮すればよい，ということになる．もちろん，

$$\omega_k = c|\boldsymbol{k}| \tag{5.16}$$

である．縦電場のほうは，光量子とは関係のない部分で，そのままにしておく((3.34)，(3.40) 参照)．

§5　生成・消滅演算子による横成分の表現

そこで，無次元行列の振幅が，任意の同時刻で，交換関係

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), a_{\boldsymbol{k}'}^{(s)\dagger}(t)] = \delta_{r,s}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{5.17 a}$$

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), a_{\boldsymbol{k}'}^{(s)}(t)] = [a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t), a_{\boldsymbol{k}'}^{(s)\dagger}(t)] = 0 \tag{5.17 b}$$

を満たす演算子であるとしよう．これらの関係が運動方程式 (5.7) と矛盾しなければよい．まず，それを調べてみよう．

無次元振幅の満たす新しい交換関係式（5.17）は任意の時刻に成り立つのだから，ある時刻 t における変数と，時刻 t_0 における変数とはユニタリー変換で結ばれているはずである．つまり，時間的変化はユニタリー変換の中に含まれる．したがって，

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \equiv U^\dagger(t) a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t_0) U(t) \tag{5.18 a}$$

$$a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t) \equiv U^\dagger(t) a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t_0) U(t) \tag{5.18 b}$$

とおくことができる．$U(t)$ はユニタリー変換で，

$$U(t)U^\dagger(t) = U^\dagger(t)U(t) = I \tag{5.19 a}$$

$$\therefore \quad U^\dagger(t) = U^{-1}(t) \tag{5.19 b}$$

を満たすかぎり何でもよい．そこでこの任意性を利用して，運動方程式 (5.7) が満たされるように $U(t)$ を決める．いうまでもなく，このユニタリー変換は，電流がゼロならば，1 である．

そのために（5.18）の時間微分をとると，

$$\begin{aligned}\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)&=\dot{U}^{\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t_0)U(t)+U^{\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t_0)\dot{U}(t)\\&=\dot{U}^{\dagger}(t)U(t)U^{\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t_0)U(t)\\&\quad+U^{\dagger}(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t_0)U(t)U^{\dagger}(t)\dot{U}(t)\\&=\dot{U}^{\dagger}(t)U(t)a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)+a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)U^{\dagger}(t)\dot{U}(t)\end{aligned}\tag{5.20}$$

ところが，ユニタリー性の条件（5.19 a）によると，

$$\dot{U}^{\dagger}(t)U(t)+U^{\dagger}(t)\dot{U}(t)=0\tag{5.21}$$

である．これはある未定のエルミートな演算子 $H'(t)$ を用いて，

$$iU^{\dagger}(t)\dot{U}(t)=-i\dot{U}^{\dagger}(t)U(t)=\frac{1}{\hbar}H'(t)\tag{5.22 a}$$

$$\therefore\quad i\hbar\dot{U}(t)=U(t)H'(t)\tag{5.22 b}$$

と書くことができる，ということである．この式に $\hbar$ を入れたのは，$H'(t)$ の次元をエネルギーの次元にしておきたいからである．

関係式（5.22 a）を（5.20）に代入して，$U(t)$ の性質を使って整理すると，

$$i\hbar\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)=[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t),H'(t)]\tag{5.23 a}$$

となる．同様にして，

$$i\hbar\dot{a}_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)=[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t),H'(t)]\tag{5.23 b}$$

が得られる．この未定の $H'(t)$ をうまく選んで，運動方程式（5.7）と（5.23）とが一致するようにできれば，Maxwell の理論に矛盾しないで生成・消滅演算子（5.17）を取り入れることができたことになる．以下それが可能であることを示す．

まず，表現（5.5 c）を使うと，同時刻において，

$$\begin{aligned}[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t),\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)]&=\sum_{s=1,2}\sum_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{e}^{(s)}(\boldsymbol{\ell})f_{\boldsymbol{\ell}}^{*}(x)[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t),a_{\boldsymbol{\ell}}^{(s)\dagger}(t)]\\&=\sum_{s=1,2}\sum_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{e}^{(s)}(\boldsymbol{\ell})f_{\boldsymbol{\ell}}^{*}(x)\delta_{r,s}\delta_{k,\ell}=\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}^{*}(x)\end{aligned}\tag{5.24 a}$$

同様にして，

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t),\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)]=-\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}(x)\tag{5.24 b}$$

が得られる．したがって

$$H'(t)=-\int_V d^3x\,\boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)\tag{5.25}$$

と選んでおくと，

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), H'(t)] = -\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x)f_{\boldsymbol{k}}^{*}(x) \tag{5.26 a}$$

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t), H'(t)] = \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{J}(x)f_{\boldsymbol{k}}(x) \tag{5.26 b}$$

であって，これは (5.9) の右辺に $i\hbar$ をかけたものと完全に一致する．ただし，ここでは，$\boldsymbol{J}(x)$ は演算子を含まない普通の数とした（この条件は，あとでゆるめなくてはならなくなる）．

$H'(t)$ として，(5.25) を採用すると，任意の時刻で交換関係 (5.17) を満たす振幅の演算子は，(5.23) によって Maxwell 方程式に矛盾しない．ただしこの場合，(5.5) にみられるように，場はもはや単なる数ではなく演算子となる．したがって，場の量をかけ算するとき勝手に順序を変えてはいけない．電磁場の全エネルギー (5.11) も，全慣性 (5.12) もいまや演算子となった．(5.25) で与えられる量 $H'(t)$ を電流と輻射場の相互作用 Hamiltonian とよぶ．もっとも，非相対論的荷電粒子と電磁場の相互作用を取り扱うときには，(5.25) を，少々変更しなければならなくなる（次章の (6.15) をみよ）．

ことのついでに，もう少し計算を進めておくと：　式 (5.11) に戻り，交換関係 (5.17) を用いると，

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), H_{\mathrm{rad}}(t)] = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t) \tag{5.27 a}$$

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t), H_{\mathrm{rad}}(t)] = -\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t) \tag{5.27 b}$$

したがって，

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t)\} \\ &= i\hbar\frac{d}{dt}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\cdot\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t) + \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t)\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t) \\ &= [a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), H'(t)]\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t) + [a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), H_{\mathrm{rad}}(t)]\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t) \\ &= [a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(t), H_{\mathrm{rad}}(t) + H'(t)]\exp(-i\omega_{\boldsymbol{k}}t) \end{aligned} \tag{5.28 a}$$

同様にして，

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t)\exp(i\omega_{\boldsymbol{k}}t)\} \\ &\quad = [a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}(t), H_{\mathrm{rad}}(t) + H'(t)]\exp(i\omega_{\boldsymbol{k}}t) \end{aligned} \tag{5.28 b}$$

となる．

無次元振幅変数の交換関係は，(5.17)にみられるように同時刻で与えられているから，(5.23)～(5.28)などの計算ではいつでも時刻をそろえておかなければならない，ということに注意されたい．

上の (5.28) の 2 つの式をいっしょにすると，

$$i\hbar\partial_t \boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=[\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x), H_{\mathrm{rad}}(t)+H'(t)] \tag{5.29}$$

となる．

【余談】

このあたりの議論は，量子力学に慣れていない読者には少々なじみにくいかもしれない．上の式 (5.28)，(5.29) は，Heisenberg の運動方程式とよばれるもので，量子力学ではいつでも，力学変数に対してこの形式を要求する．それは，エネルギーと振動数が Planck の定数で結ばれることを保証する関係である．Heisenberg の運動方程式が，古典論の運動方程式と一致するように，演算子の代数関係と H とを決定する．これを“量子化の手続き”とよぶ．詳しくは，適当な量子力学の教科書を参照されたい．拙著『古典場から量子場への道』(講談社，122 頁) にも，この点が説明してある．

§6 自由な光量子

電磁場と荷電粒子系との相互作用がないときには，相互作用 Hamiltonian (5.25) はゼロである．この場合を詳しく調べてみよう．これが量子電磁力学の基礎になる．この場合には，無次元の複素振幅変数は時間によらないから，以下 t や t_0 をいちいち書かない．基礎的な物理量は，

$$H_{\mathrm{rad}}=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{G}=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.31}$$

で，両者とも時間によらない．かつ，振幅変数は交換関係

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}, a_{\boldsymbol{k}'}^{(s)\dagger}]=\delta_{r,s}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{5.32 a}$$

$$[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}, a_{\boldsymbol{k}'}^{(s)}]=[a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}, a_{\boldsymbol{k}'}^{(s)\dagger}]=0 \tag{5.32 b}$$

を満たす．電磁場やベクトルポテンシャルは，いままでと同様 (5.5) で表現される．(5.14) の数の演算子は時間によらず，

$$N_{\boldsymbol{k}}^{(r)}=a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.33}$$

である．ここで，$N, H_{\rm rad}, \boldsymbol{G}$ はすべて互いに交換することをまず確かめておいてほしい．

生成・消滅演算子の性質については，『物理数学ノート I』でやや詳しく議論したから，それを是非参照されたい．以下，多くの添え字を避けるために，r と $\boldsymbol{k}$ を1つの文字 λ で表す．r と $\boldsymbol{k}$ の組 λ を，単にモードとよぶことにする．すると，モード λ をもった数の演算子

$$N_\lambda = a_\lambda{}^\dagger a_\lambda \tag{5.34}$$

は，各 λ について固有値

$$n_\lambda = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots \tag{5.35}$$

をもち，規格化された固有関数は，

$$\Psi(n_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n_\lambda !}}\{a_\lambda{}^\dagger\}^{n_\lambda}|0\rangle \tag{5.36}$$

である．ただし，$|0\rangle$ とは，すべての λ について

$$a_\lambda|0\rangle = 0 \tag{5.37 a}$$

を満たし，自分自身とのスカラー積が，

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{5.37 b}$$

に規格化された，通常"真空"とよばれる1つの固有状態である．その意味はおいおい明らかになるが，(5.37 a) より，

$$N_\lambda|0\rangle = 0|0\rangle \tag{5.37 c}$$

したがって，これは固有値 $n_\lambda = 0$ に属する固有関数である．

固有関数 (5.36) は一般には，便宜のため，

$$N_\lambda \boldsymbol{\Psi}(n_\lambda) = n_\lambda \boldsymbol{\Psi}(n_\lambda) \tag{5.38}$$

$$n_\lambda = 0, 1, 2, 3\cdots\cdots$$

$$(\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda), \boldsymbol{\Psi}(n'_{\lambda'})) = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{n_\lambda, n'_\lambda} \tag{5.39}$$

を満たすように作られる．(5.39) は $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ の左から $\boldsymbol{\Psi}(n'_{\lambda'})$ のエルミート共役をかけることを意味する．固有関数 (5.36) がこれらの関係を満たしていることを自ら試してみられたい(演習問題)．固有値 n_λ を，モード $\lambda=(r, \boldsymbol{k})$ をもった光の粒子の数とすると，関数 $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ は，モード $\lambda=(r, \boldsymbol{k})$ をもった光量子が n_λ 個ある**状態**を表す．関数 $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ ($n_\lambda = 0, 1, 2\cdots$) で張られる空間を，Fock 空

間とよぶ．関数 $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ はしたがって，Fock 空間におけるベクトルで，N_λ の**固有ベクトル**ともよばれることがある．これらの固有ベクトルは，全部で完全系をつくる．いいかえると，モード λ をもった任意の物理状態は関数 $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ で展開できる．もう一度いいかえると，電磁系のモード λ をもった物理的状態は，モード λ をもった光量子が n_λ 個ある状態の線型結合である．

関係式

$$a_\lambda \boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)=\sqrt{n_\lambda}\,\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda-1) \tag{5.40 a}$$

$$a_\lambda{}^\dagger \boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)=\sqrt{n_\lambda+1}\,\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda+1) \tag{5.40 b}$$

などの証明はやさしいから，自分でやってみられたい．関数 $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ の定義 (5.36) と交換関係 (5.32) を使えばすぐ証明できる．これらの関係は，n_λ 個の光量子のある状態に a_λ をかけると光量子が $n_\lambda-1$ 個ある状態になり，$a_\lambda{}^\dagger$ をかけると光量子が $n_\lambda+1$ 個ある状態になることを示している．これが，a_λ を**消滅演算子**，$a_\lambda{}^\dagger$ を**生成演算子**とよぶ理由である．

古典物理学とは違って，量子化した電磁場の理論には，物理的状態を指定するのに，状態ベクトルという余計なものが入ってきた．場の量のほうは，演算子として相変わらず Maxwell の方程式を満たす．この消滅・生成演算子というのは，量子力学における調和振動子と深い関係にあり，いわば，調和振動子の振幅を表す演算子である．

さて，光量子が n_λ 個ある状態は，光の偏りを示す変数 r と光の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の各モードについて，(5.36) のように書かれるが，交換関係 (5.32) からすぐわかるようにモードの異なる光量子の消滅・生成演算子は互いに交換するから，いろいろなモードのすべての光量子の状態を考慮するためには，単にすべてのモードについての積をとればよい．たとえば，各モードに n_λ 個ずつ光量子のある状態は，

$$\boldsymbol{\Psi}\{n_\lambda\}=\prod_\lambda \frac{1}{\sqrt{n_\lambda!}}\{a_\lambda{}^\dagger\}^{n_\lambda}|0\rangle \tag{5.41}$$

となる．これは，完全系を張る．これは，電磁場系の任意の物理的状態が，(5.41) の線型結合であるという意味である．

容易に確かめられるように，

$$(\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}} N_{\boldsymbol{k}}^{(r)})\boldsymbol{\Psi}\{n_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\}=(\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}}^{(r)})\boldsymbol{\Psi}\{n_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\} \tag{5.42}$$

$$H_{\text{rad}}\boldsymbol{\Psi}\{n_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\}=(\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}}^{(r)})\boldsymbol{\Psi}\{n_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\} \tag{5.43}$$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Psi}\{n_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\}=(\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k} n_{\boldsymbol{k}}^{(r)})\boldsymbol{\Psi}\{n_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\} \tag{5.44}$$

が成り立っている．H_{rad} と $\boldsymbol{G}$ の固有値がそれぞれ，うまい具合に $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ と $\hbar\boldsymbol{k}$ との整数倍になっている．

(5.42)，(5.43)，(5.44) の $\boldsymbol{k}$ に関する和は，(3.10) を満たす波数 $\boldsymbol{k}$ について加え合わせることを意味する．

§7　光量子のモードの数

さて，次に求めなければならないのは，Fourier 展開に現れた

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n} \qquad (\boldsymbol{n}=0,1,2,\cdots) \tag{5.45}$$

が，$\boldsymbol{k}$ で張られる三次元の空間の中にどれだけ分布しているかということである．つまり光子のとりうるモードの数を勘定しておかなければならない．

これを求めるのは簡単である．$\boldsymbol{k}$ で張られる空間の中では，関係(5.45)を満たす点は，一定の密度

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3=\frac{(2\pi)^3}{V} \tag{5.46}$$

で分布している．したがって，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$ の微小体積の中の可能な点の数は，

$$\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k \tag{5.47}$$

である．これだけのモードが，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$の微小体積の中に一定の密度で分布している．

いま，$\boldsymbol{k}$ の極座標をとり $d\boldsymbol{k}$ が原点に対して張る立体角を $d\Omega_{\boldsymbol{k}}$ とすると，

$$d^3k=k^2\,dk\,d\Omega_{\boldsymbol{k}} \tag{5.48}$$

さらに，これに光子の関係式

$$\omega=ck \tag{5.49}$$

を使うと光子の角振動数が ω と $\omega+d\omega$ の間にあるモードの数がわかる．すなわち，

$$\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k=\frac{V}{(2\pi)^3}k^2dk\,d\Omega_k=\frac{V}{(2\pi c)^3}\omega^2d\omega\,d\Omega_k \tag{5.50}$$

となる．なお，光子には2つの偏り $r=1,2$ があるから，モードの数は全体で(5.49) や (5.50) を2倍したものになる．

体積がきわめて大きいときには，(5.45)の $\boldsymbol{n}$ から連続変数 $\boldsymbol{k}$ に移ることができる．その場合には，

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{n}\cdots\Rightarrow\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\cdots \tag{5.51}$$

というおきかえをすればよい．被積分関数の性質によっては，(5.50)などを用いて，k や ω などに変数変換して計算を進めることができる．それに応じて，消滅・生成演算子を，

$$\lim_{V\to\infty}\left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^{1/2}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\Rightarrow a^{(r)}(\boldsymbol{k}) \tag{5.52 a}$$

$$\lim_{V\to\infty}\left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^{1/2}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}\Rightarrow a^{(r)\dagger}(\boldsymbol{k}) \tag{5.52 b}$$

とおきかえる．また Kronecker のデルタは，

$$\lim_{V\to\infty}\frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'}\Rightarrow\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{5.53}$$

によって Dirac のデルタになる．したがって，表示(5.5 c)や交換関係(5.17 a)はそれぞれ，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{r=1,2}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}}e^{(r)}(\boldsymbol{k})\\&\times\{a^{(r)}(\boldsymbol{k})\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_kt)+a^{(r)\dagger}(\boldsymbol{k})\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_kt)\}\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$[a^{(r)\dagger}(\boldsymbol{k}),a^{(r')\dagger}(\boldsymbol{k}')]=\delta_{r,r'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{5.55}$$

となる．

最後に強調しておくが，この節での計算は，光子のとりうるモードの数のことであって，光子の数とは全然違うものである．

§8 物理的解釈

電磁場の横成分を生成・消滅演算子で書いた結果，場自身が演算子になってしまった．この場の演算子の時間空間依存性は，いままでどおり Maxwell の方

程式を満たすようになっているが，場の量をかけ算するときの規則は変わってしまった．生成・消滅演算子は『物理数学ノートⅠ』の第Ⅴ章で議論してあるが，行列で表すと，無限次元の行列になる．したがって電磁場も，それから作られるエネルギー H_{rad} や慣性 $\boldsymbol{G}$ もすべて無限次元の行列である．これは物理的に何を意味するのであろうか？　これらの無限次元の物理量と，それらを観測するということは，どういうことであろうか？

この答えは，量子力学または場の量子論によって与えられる．ここで場の量子論の全貌を紹介するわけにはいかないが，簡単に物理的解釈を説明しておこう．

まず，エネルギー (5.30) や慣性 (5.31) のような観測可能量はエルミートである(逆は真ではない)．エルミート演算子はユニタリー変換で対角化できる．そして，対角要素はすべて実数である．その例は，エネルギー H_{rad} の固有値方程式 (5.43) および慣性 $\boldsymbol{G}$ の固有値方程式 (5.44) などである．この場合には，粒子数，エネルギーと慣性の3個の物理量が互いに交換するので，共通な固有ベクトルで固有値問題が解けた．つまり同時に対角化できた．これらの固有値は実数で，粒子数，エネルギーおよび慣性を観測したとき得られる可能な値である．古典論では観測値は連続的にどんな値でもとれたが，量子化された理論では，固有値問題 (5.42)，(5.43)，(5.44) の右辺に現れた固有値しかとれない．これらを眺めるとすぐわかるように，可能な値は1個，2個，…と勘定できるような「つぶ」から成り立っている．しかもそれらの「つぶ」はエネルギー $\hbar\omega_k$，慣性 $\hbar\boldsymbol{k}$ をもっていることがわかる．そして，Maxwell 方程式の結果として，これらは (5.16) の関係によって結ばれている．

取り扱う物理量が演算子になった結果，演算子が働きかける被演算子が必要になる．それを普通 $\boldsymbol{\Psi}$ とか $|\ \ \rangle$ (これを“ケット”とよぶ) と書き，“状態”とか“状態ベクトル”という．たとえば，固有値問題 (5.42)，(5.43)，(5.44) の固有関数 $\boldsymbol{\Psi}\{n_\lambda\}$ は，粒子数が $\sum n_\lambda$，エネルギーが $\sum\hbar\omega_\lambda n_\lambda$，慣性が $\sum\hbar\boldsymbol{k}n_\lambda$ をもった状態ベクトルである．

状態 $\boldsymbol{\Psi}\{n_\lambda\}$ において粒子数を観測すると，観測値は，

$$\sum_{\lambda} n_\lambda \equiv \sum_{r=1,2} \sum_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.56}$$

である．

またその状態での，系のとりうるエネルギーの測定値は，

$$\sum_{\lambda} \hbar\omega_\lambda n_\lambda \equiv \sum_{r=1,2} \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_k n_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.57}$$

であって，慣性も，可能な測定値は同様に，

$$\sum_{\lambda} \hbar \boldsymbol{k} n_\lambda \equiv \sum_{r=1,2} \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar \boldsymbol{k} n_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.58}$$

である．これ以外の観測値，たとえばエネルギー $\hbar\omega_k$ の半分などが得られることは決してない．

たとえば空洞の中に閉じ込められた電磁場のエネルギーの計算には，これらの固有状態のすべてが等しい確率で現れ（これは量子力学とは別の，統計力学の基本原理），Planck の分布を与える．

ここでは，電流や電荷を無視しているから，つまりいわゆる自由な電磁場を問題にしているから，エネルギーや慣性の対角化は容易であったが，(5.25)の“相互作用 Hamiltonian”および，荷電粒子の Hamiltonian まで考慮して物理系全体の Hamiltonian

$$H_{\text{particle}} + H_{\text{rad}} + H' \equiv H_{\text{total}} \tag{5.59}$$

を考えると，対角化（固有値を求めること）は容易ではない．通常は相互作用 Hamiltonian H' をひとまず無視して固有値を求め，それを基礎にして，摂動論的に H' の効果を逐次に取り入れる．粒子の Hamiltonian や摂動論についてはあとで説明するが，当分の間，相互作用を無視した場合の自由な電磁場だけを考えよう．

まず，系がある規格化された状態 $\boldsymbol{\Psi}_0$ にあるとき，ある物理量 F（たとえば H_{rad} や $\boldsymbol{G}$ など）の**期待値**を，

$$(\boldsymbol{\Psi}_0,\ F\boldsymbol{\Psi}_0) \tag{5.60}$$

で定義する．コンマの左側の $\boldsymbol{\Psi}_0$ は右側の $\boldsymbol{\Psi}_0$ のエルミート共役である．たとえば，各モードの光子の数全体を考えると，すべての状態は完全系を作っているから，任意の状態 $\boldsymbol{\Psi}_0$ はそれらで展開できる．すなわち，

$$\boldsymbol{\Psi}_0=\sum_{\{n_\lambda\}} C_0\{n_\lambda\}\boldsymbol{\Psi}\{n_\lambda\} \tag{5.61 a}$$

ここで，$C_0\{n_\lambda\}$ は展開係数で，直交条件（5.39）により，

$$C_0\{n_\lambda\}=(\boldsymbol{\Psi}\{n_\lambda\},\ \boldsymbol{\Psi}_0) \tag{5.61 b}$$

である．状態 $\boldsymbol{\Psi}_0$ は規格化されているので，

$$\begin{aligned}1=(\boldsymbol{\Psi}_0,\ \boldsymbol{\Psi}_0)&=\sum_{\{n_\lambda\}}\sum_{\{n'_{\lambda'}\}} C_0^*\{n'_{\lambda'}\}C_0\{n_\lambda\}(\boldsymbol{\Psi}_0\{n'_{\lambda'}\}\boldsymbol{\Psi}_0\{n_\lambda\})\\ &=\sum_{\{n_\lambda\}}|C_0\{n_\lambda\}|^2\end{aligned} \tag{5.62}$$

を満たしている．この式の物理的解釈は，状態 $\boldsymbol{\Psi}_0$ は，光子の分布が $\{n_\lambda\}$ であるような確率が $|C_0\{n_\lambda\}|^2$ の割合で含まれている状態である．たとえば特別の場合として，モード λ の光子が $\{m_\lambda\}$ 個ある状態は，

$$\boldsymbol{\Psi}_0=\boldsymbol{\Psi}\{m_\lambda\} \tag{5.63}$$

で，

$$C_0\{n_\lambda\}=\begin{cases}1 & n_\lambda=m_\lambda\\ 0 & n_\lambda\neq m_\lambda\end{cases} \tag{5.64}$$

であって，この状態では，光子の数は確実に $\{m_\lambda\}$ である．この状態で H_{rad} を観測すると，モード λ にあるエネルギー $\hbar\omega_k$ をもった光子の数は確実に $\{m_\lambda\}$ である．

一方，光子の数をいろいろと含んだ状態（5.61 a）で H_{rad} を観測したときの期待値は，

$$(\boldsymbol{\Psi}_0,\ H_{\mathrm{rad}}\boldsymbol{\Psi}_0)=\sum_{\{n_\lambda\}}\hbar\omega_k n_\lambda|C_0\{n_\lambda\}|^2 \tag{5.65}$$

であり，モード λ の光子の全エネルギー $\hbar\omega_k n_\lambda$ に確率 $|C_0\{n_\lambda\}|^2$ をかけて，すべての可能性について加えた値が得られる．つまり，(5.61 a) という状態で何度も何度もエネルギーを観測すると，そのたびごとに異なった値が得られるが，モード λ の光子の全エネルギー $\hbar\omega_k n_\lambda$ が得られる確率は $|C_0\{n_\lambda\}|^2$ である．慣性のほうの期待値も同様である．詳しいことは量子力学の教科書をみて，状態ベクトルの意味をよく理解しておいてほしい．

以前にふれたように，電場の横成分（5.5 a），磁場（5.5 b）の右辺の生成・消滅演算子は時間によらず，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)=\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$$
$$\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t)-a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t)\} \tag{5.66}$$

$$\boldsymbol{B}(x)=\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$$
$$\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t)-a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t)\} \tag{5.67}$$

および，Coulomb ゲージのベクトルポテンシャルは（5.5 c）により，

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$$
$$\times\{a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t)+a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t)\} \tag{5.68}$$

と書くことができる．したがって，状態ベクトル $\boldsymbol{\Psi}\{n_\lambda\}$ にこれらの量を作用させると，関係 (5.40) により，光子の数が $n_\lambda-1$ と $n_\lambda+1$ の状態に変わる．いいかえると，場の量は，光子を1個減らすか，1個増やす役割をする．とくに光子のない真空状態 $|0\rangle$ に $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$ を作用させると，(5.37 a) により，(5.62) の右辺第1項はおちて，

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)|0\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t)\,a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}|0\rangle \tag{5.69}$$

つまり，最初に光子が全然なくても，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$ という演算子は，真空状態 $|0\rangle$ を光子が1個ある状態に変える働きをする．しかし左からまた真空をかけて，真空期待値を計算してみると，$\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda=1)$ と真空状態の直交性（5.39）によって，

$$\langle 0|\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)|0\rangle=0 \tag{5.70}$$

が得られる．つまり，真空状態において $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)$ を観測すると，いつでもゼロという値が得られる．

そんなこと，当たり前ではないか？　と思われるかもしれないが，ことはそう簡単ではない．場の真空期待値はゼロでも，場はゼロのまわりをゆらいでいる．

それをみるために，たとえば $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}$ の2つかかったものの真空期待値を計算してみると，

$$\langle 0|\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}i}(x)\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}j}(x')|0\rangle$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_0 V}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\left\{\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right\}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-i\omega_{\boldsymbol{k}}(t-t')] \tag{5.71}$$

となる．ただし，ここで偏極ベクトル $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ の完全性 (3.13) を用いた．この表現 (5.71) はゼロではない．事実，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}', t=t'$ とすると，$\boldsymbol{k}$ に関する和は発散する．いいかえると，一点における場のゆらぎは無限大である．この発散は場というものが無限個の自由度をもっていることの反映である．

場の自由度が無限大であるということは，古典場でも同じであって，場の量子論の特徴ではない．場の量子論の特徴は，場の量の非可換性にある．たとえば電場の横成分 (5.66) と Coulomb ゲージのベクトルポテンシャル (5.68) との同時刻における交換関係をとってみると，

$$[E_{\mathrm{T}i}(x), A_{\mathrm{T}j}(x')]_{t=t'}=\frac{\hbar i}{\varepsilon_0 V}\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] \tag{5.72 a}$$
$$=\frac{\hbar i}{\varepsilon_0}\left\{\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{5.72 b}$$

が得られ，やはり $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ で無限大になる．ということは，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}$ と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}$ とはよく知られた不確定関係によって，互いの測定値の正確さが制限を受けるということである．

このほか，光子の数と位相の間にも不確定関係が生ずる．つまり，光子の数を正確に知ると，光子の位相はまったく不定になる．2 個の波の位相差がわかっているとき，光子の数を決めると，どちらの波がどんな位相をもっているかわからなくなる．

【蛇足】

いろいろな教科書をみると，消滅・生成演算子を

$$a=e^{i\phi}\sqrt{N} \tag{5.73 a}$$
$$a^\dagger=\sqrt{N}e^{-i\phi} \tag{5.73 b}$$

と書いて，それらの交換関係を用いて，数と位相の間の交換関係

$$[N,\phi]=i \tag{5.74}$$

を導き，それから数と位相の間の不確定関係が導いてあるが，実は，N の平方根という演算子を作ることも，エルミートな ϕ を作ることも不可能なのである．(5.73)の関係をまじめに理解することができなくても，落胆しないように．なお位相のことはあとでふ

れる.

§9 形式的整備

いままで，荷電粒子およびそれと電磁場の相互作用は完全に無視してきた．相互作用のない場合(つまり，電流と電荷のない場合)の電場の横成分は(5.66)，磁場は (5.67)，かつ Coulomb ゲージのベクトルポテンシャルは (5.68) で与えられ，これらは Maxwell 方程式の結果である．また，これらは生成・消滅演算子で書かれている．この場合，Hamiltonian は，

$$H_{\mathrm{rad}}=\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{k}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}a_{\boldsymbol{k}}^{(r)} \tag{5.75}$$

である．すぐわかるように，これらはすべて

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)=[\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x), H_{\mathrm{rad}}] \tag{5.76 a}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x)=[\boldsymbol{B}(x), H_{\mathrm{rad}}] \tag{5.76 b}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=[\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x), H_{\mathrm{rad}}] \tag{5.76 c}$$

を満たし，前に書いた Maxwell の方程式 (3.32)，(3.33)((3.33) では，電流をゼロとおく)，すなわち，

$$\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{T}}(x)=-\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x) \tag{5.77 a}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}(x)=-c^{2}\nabla^{2}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x) \tag{5.77 b}$$

に一致する (演習問題).

(5.76) こそは，量子論に特徴的な，エネルギーと角振動数との関係

$$\varepsilon_{k}=\hbar\omega_{k} \tag{5.78}$$

を保証するものである (演習問題).

これだけでは数学的道具は十分ではなく，これらに加え，状態ベクトルというものを考えなければならない．場は状態ベクトルに作用する演算子である．この場合，系の時間的変化はすべて，場の量が担っており，状態ベクトルは時間によらない．このことを忘れないようにはっきり書くと次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 = 0 \tag{5.79}$$

これで，相互作用のないときの電磁場の量子論の数学的道具は十分である．

さて，上の理論を荷電粒子と相互作用がある場合に拡張するには，どうしたらよいであろうか？　この問題は次の章で説明する．

その前にやっておかなければならないことは，上の（5.75）や（5.76）を基礎とする光量子の理論が，古典的な理論とどのように関係しているかということを調べておくことである．

たとえば，前に計算した $\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)$ と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x')$ の交換関係はゼロではなく，不確定関係が生じる．古典論ではいうまでもなくそんなことは起こらない．

§10　コヒーレント状態

量子化された電磁場と古典的な電磁場の関係をみるには，不確定の最小の状態ベクトルを作って，それで量子化された電磁場の期待値をとってみるとよい．すべてのモードを一度に考慮するのはしんどいので，1つのモード λ だけをまず問題にする．

いま，ユニタリー演算子

$$U_{\mathrm{c}}(f_\lambda) \equiv \exp\{f_\lambda a_\lambda^\dagger - f_\lambda^* a_\lambda\} \tag{5.80 a}$$

$$= \exp\{f_\lambda a_\lambda^\dagger\}\exp\{-f_\lambda^* a_\lambda\}\exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\} \tag{5.80 b}$$

を考える．ここに，f_λ は任意の複素数である．第1行目から2行目に移るには，『物理数学ノート　II』第I章を参照されたい．これを真空状態に作用させると，

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{c}}(f_\lambda)|0\rangle &= \exp\{f_\lambda a_\lambda^\dagger\}\exp\{-f_\lambda^* a_\lambda\}\exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}|0\rangle \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}\exp\{f_\lambda a_\lambda^\dagger\}|0\rangle \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}\sum_{n_\lambda=0}^{\infty}\frac{(f_\lambda)^{n_\lambda}}{n_\lambda!}(a_\lambda^\dagger)^{n_\lambda}|0\rangle \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}\sum_{n_\lambda=0}^{\infty}\frac{(f_\lambda)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}}\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda) \equiv \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{c}}(f_\lambda)
\end{aligned} \tag{5.81}$$

となる．この状態を**コヒーレント状態**とよぶ．コヒーレント状態は，規格化されており消滅演算子の固有状態になっている．それをみるには(5.40 a)を使えばよい．すなわち，

$$a_\lambda \boldsymbol{\Psi}_c(f_\lambda)=\exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}\sum_{n_\lambda=0}^{\infty}\frac{(f_\lambda)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}}a_\lambda \boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}\sum_{n_\lambda=0}^{\infty}\frac{(f_\lambda)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}}\sqrt{n_\lambda}\,\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda-1)$$
$$=f_\lambda \boldsymbol{\Psi}_c(f_\lambda) \tag{5.82}$$

消滅演算子の固有値は f_λ である．これは任意の複素数だから，これを

$$f_\lambda=\sqrt{\bar{n}_\lambda}\exp(i\eta_\lambda) \tag{5.83}$$

とおくと，コヒーレント状態においてのモード λ の光子の数は $\bar{n}_\lambda$，位相は η_λ となる．ただし，$\bar{n}_\lambda$ とは，コヒーレント状態の展開係数 $|f_\lambda|^{2n\lambda}/(n_\lambda!)$ を最大にする n_λ の値である（演習問題）．

コヒーレント状態（5.81）は，消滅演算子の固有状態になってはいるが，生成演算子の固有状態ではない．ただし，(5.82）のエルミート共役をとると，

$$\boldsymbol{\Psi}_c^\dagger(f_\lambda)a_\lambda^\dagger=f_\lambda^* \boldsymbol{\Psi}_c^\dagger(f_\lambda) \tag{5.84}$$

が得られる．光子のモード全体についてコヒーレント状態を作り，それらすべてのコヒーレント状態の積を，

$$|N,\eta\rangle\equiv\prod_\lambda \Psi_c(f_\lambda),\qquad N\equiv\sum_\lambda \bar{n}_\lambda \tag{5.85}$$

とすると，ベクトルポテンシャルの，コヒーレント状態に関する期待値は，

$$\langle N,\eta|\boldsymbol{A}_\mathrm{T}(x)|N,\eta\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar\bar{n}_{\boldsymbol{k}}^{(r)}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$$
$$\times\{\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_{\boldsymbol{k}}t+i\eta_{\boldsymbol{k}}^{(r)}]+\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_{\boldsymbol{k}}t-i\eta_{\boldsymbol{k}}^{(r)}]\} \tag{5.86}$$

となり，古典的な描像が得られる．つまり，振幅と位相の概念が回復される．

最後に注意しておくことは，コヒーレント状態は不確定最小の状態であるということである(演習問題)．また，$\bar{n}_\lambda$ が $\bar{n}_\lambda$ の平方根より十分大きいときには，コヒーレント状態（5.81）は

$$\Psi_{\mathrm{C}}(f_\lambda)\approx\exp\left\{-\frac{1}{2}|f_\lambda|^2\right\}\frac{(f_\lambda)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda}}\Psi(n_\lambda) \tag{5.87}$$

と近似できる．理由を考えてみよ．

演 習 問 題 V

1. 原子内の電子が，原子核のまわりを円運動しているとき，単位時間に電子が失うエネルギーを古典的に計算してみよ．

2. Coulomb ゲージのポテンシャル (5.5 c) が，横型電場 (5.5 a)，磁場 (5.5 b) を与えることを確かめよ．

3. (5.5) の 3 つの式を Fourier 逆変換して，(5.6) を導け．

4. 電流が時間によらないとき無次元の振幅変数の時間依存性を求めよ．

5. 調和振動子のエネルギーと慣性の式(3.30 a)，(3.31)に，(5.3)を用いて，(5.11)，(5.12) を確認せよ．

6. Hamiltonian (5.11) の $N_{\boldsymbol{k}}^{(r)}$ が，各 $\boldsymbol{k}$ と r について，0, 1, 2, …の値をとるとして，正準集合の分配関数を計算してみよ．

7. (5.5)，(5.7) を用い，Ampare-Maxwell の式 (3.33) を導け．

8. (5.24 a) を確かめよ．

9. 相互作用がない自由な電磁場に対し，エネルギー (5.30)，慣性 (5.31)，数 (5.33) がすべて交換することを確かめよ．

10. $n_\lambda=2$，$n_\lambda'=3$ のとき，直交条件 (5.39) を確かめよ．

11. 一般の n_λ，n_λ' に対して規格化直交条件 (5.39) を導け．

12. (5.40 a)，(5.40 b) を導け．

13. (5.71) を導け．

14. (5.72) を確かめよ．

15. 表現 (5.73) は，何がいけないか？

16. (5.76) の右辺の交換関係を計算し，(5.77) が得られることを確認せよ．

17. (5.75) の Hamiltonian を，

$$H_{\mathrm{rad}}=\sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda{}^\dagger a_\lambda$$

とおき，(5.76) より，

$$\varepsilon_\lambda=\hbar\omega_\lambda$$

を導いてみよ．

18. $U_c^\dagger(f_\lambda)a_\lambda U_c(f_\lambda)$ および $U_c^\dagger(f_\lambda)a_\lambda^\dagger U_c(f_\lambda)$ を計算してみよ．

19. コヒーレント状態 (5.81) の $\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda)$ の係数を最大にする $|f_\lambda|^2$ を求めよ．

20. コヒーレント状態は，調和振動子の座標と運動量の間の不確定性を最小にすることを確認せよ．また，粒子数のゆらぎを計算せよ．

第6章　荷電粒子と電磁場の相互作用

§1　は　じ　め　に

前章では，荷電粒子およびそれとの相互作用を無視した自由な電磁場を量子論的に取り扱う手法を簡単に議論した．数学的な道具は (5.75)，(5.76) および (5.78) が，電流と電荷をゼロとおいた Maxwell の方程式と両立するということだけである．

荷電粒子と電磁場の相互作用を取り入れるには，互いに同等な2つの方法がある．第1の方法は，電磁場に関する方程式 (5.75)，(5.76) のほうはそのままにしておき，状態ベクトルを時間に依存するように，(5.78) を変更するやり方である．第2の方法は，状態ベクトルのほうは時間に依存しないように，(5.78) はそのままにしておき，電磁場のほうの式 (5.75)，(5.76) のほうを変更するやり方である．両者は互いにユニタリー変換で結ばれており，同等なものである．前者を，相互作用描像(interaction picture)の理論，後者を Heisenberg 描像 (Heisenberg picture) の理論とよぶ．使う目的によって相互作用描像が便利なこともあるし，Heisenberg 描像が便利なこともある．形式的な議論には Heisenberg 描像がすぐれているが，実際の計算には相互作用描像のほうがよく使われる．ここでは相互作用描像のほうを勉強しよう（このほか，時間的依存性をすべて状態ベクトルに背負わせる Schrödinger 描像というのがあるが，ここではそれにふれない）．

§2　荷電粒子の量子論

まず，荷電粒子の運動に関する Newton の法則を忘れよう．荷電粒子を量子論的に記述するために，1対の，時間に依存するエルミートなベクトル $\boldsymbol{p}(t)$ と

$\boldsymbol{\xi}(t)$ を用いる．これらの 2 つのベクトルの各成分 $p_i(t)$ と $\xi_j(t)$ $(i, j=1, 2, 3)$ は，同時刻交換関係

$$[p_i(t), \xi_j(t)]=-i\hbar\delta_{ij} \tag{6.1 a}$$

$$[p_i(t), p_j(t)]=[\xi_i(t), \xi_j(t)]=0 \tag{6.1 b}$$

を満たすとする．$p_i(t)$ を共役運動量の i 成分，$\xi_j(t)$ を粒子の座標の j 成分という（その意味は以下ですぐ明らかになる）．これらを使うと，たとえば，

$$\begin{aligned}[p_i(t), f(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{\xi}(t))]&=[p_i(t), \xi_j(t)]\frac{\partial f(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{\xi}(t))}{\partial \xi_j}\\ &=-i\hbar\frac{\partial f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}\end{aligned} \tag{6.2}$$

である．

粒子の Hamiltonian を，

$$H_{\text{particle}}=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2(t)+V(\boldsymbol{\xi}) \tag{6.3}$$

とおき（V は粒子に働くポテンシャルである），(5.76) と同様に，Heisenberg の運動方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}p_i(t)=[p_i(t), H_{\text{particle}}] \tag{6.4 a}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\xi_i(t)=[\xi_i(t), H_{\text{particle}}] \tag{6.4 b}$$

を要求する．(6.2) を使って右辺を計算すると，

$$[p_i(t), H_{\text{particle}}]=-i\hbar\frac{\partial}{\partial \xi_i}V(\xi) \tag{6.5 a}$$

$$[\xi_i(t), H_{\text{particle}}]=\frac{i\hbar}{m}p_i(t) \tag{6.5 b}$$

(6.4 a) と (6.5 a) とからは，

$$\frac{d}{dt}p_i(t)=-\frac{\partial}{\partial \xi_i}V(\xi) \tag{6.6 a}$$

$$\frac{d}{dt}\xi_i(t)=\frac{1}{m}p_i(t) \tag{6.6 b}$$

が得られるが，(6.6) はまさに，ポテンシャル V の中を運動する粒子の Newton 方程式とまったく同じかっこうをしていることがわかる．したがって，交換関

係 (6.1) と Hamiltonian (6.3) と Heisenberg の運動方程式を仮定すると，Newton 方程式は自動的に満たされている．ただし，粒子の運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ とか座標 $\boldsymbol{\xi}(t)$ は単なる数ではなく，エルミートな演算子で，必要ならば無限次元の行列で表現することもできる．これが粒子の量子論である．この場合にも，演算子の働きかける被演算子 ψ_0 がなければならない．そして，これは電磁場のときと同様に時間に依存しない．

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_0=0 \tag{6.7}$$

粒子の運動量や座標はエルミートだから，それらの固有値は実数で，観測したときの可能な値を与える．ただし，交換関係 (6.1) があるから，もちろん同時には対角化できない．交換関係の結果としてよく知られた不確定性関係

$$\varDelta p_i \varDelta \xi_j \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij} \tag{6.8}$$

という制限が出てくる．

これで，粒子の量子力学の数学的道具は全部そろったわけである．これは，Maxwell の理論を量子化したのと同様に，Newton の理論を量子化したものと考えてよい．

ちょっと注意しておきたいことは，Heisenberg の運動方程式 (5.76) および (6.4) についてである．これらの方程式によって，演算子の時間依存性は，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)=\exp(iH_{\mathrm{rad}}t/\hbar)\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},0)\exp(-iH_{\mathrm{rad}}t/\hbar) \tag{6.9 a}$$

$$\boldsymbol{B}(x)=\exp(iH_{\mathrm{rad}}t/\hbar)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},0)\exp(-iH_{\mathrm{rad}}t/\hbar) \tag{6.9 b}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(x)=\exp(iH_{\mathrm{rad}}t/\hbar)\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},0)\exp(-iH_{\mathrm{rad}}t/\hbar) \tag{6.9 c}$$

および

$$\boldsymbol{p}(t)=\exp(iH_{\mathrm{particle}}t/\hbar)\boldsymbol{p}(0)\exp(-iH_{\mathrm{particle}}t/\hbar) \tag{6.10 a}$$

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\exp(iH_{\mathrm{particle}}t/\hbar)\boldsymbol{\xi}(0)\exp(-iH_{\mathrm{particle}}t/\hbar) \tag{6.10 b}$$

という形にまとまるということである．この形はあとで重要になる．たとえば，粒子の固有状態

$$H_{\mathrm{particle}}\psi_a=\varepsilon_a\psi_a \tag{6.11 a}$$

$$H_{\mathrm{particle}}\psi_b=\varepsilon_b\psi_b \tag{6.11 b}$$

で (6.10) をはさむと*),

$$(\psi_b, \boldsymbol{p}(t)\psi_a)=(\psi_b, \boldsymbol{p}(0)\psi_a)\exp[i(\varepsilon_b-\varepsilon_a)t/\hbar]$$
$$\equiv \boldsymbol{p}_{ba}\exp[i(\varepsilon_b-\varepsilon_a)t/\hbar] \tag{6.12 a}$$
$$(\psi_b, \boldsymbol{\xi}(t)\psi_a)=(\psi_b, \boldsymbol{\xi}(0)\psi_a)\exp[i(\varepsilon_b-\varepsilon_a)t/\hbar]$$
$$\equiv \boldsymbol{\xi}_{ba}\exp[i(\varepsilon_b-\varepsilon_a)t/\hbar] \tag{6.12 b}$$

となる.

---

*　もし, 粒子が完全に自由で,

$$V(\boldsymbol{\xi})=0$$

ならば,

$$\psi_{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\xi}(0)}$$

$$\varepsilon_{\boldsymbol{q}}=\frac{(\hbar\boldsymbol{q})^2}{2m}$$

電荷 Ze の Coulomb 場の中の荷電粒子 (荷電 $-e$) ならば,

$$V(\xi)=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\xi}\qquad(\xi\equiv|\boldsymbol{\xi}|)$$

とおくと, 束縛状態のエネルギー固有値は,

$$\varepsilon_n=-\frac{Z^2e^2}{2a_0 4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{n^2}\qquad(n=1,2,\cdots)\qquad\left(a_0\equiv\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\right)$$

となる. 固有関数のほうは複雑で, たとえば,

$$\psi_{1,0,0}(\xi,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{Z}{a_0}\xi\right)$$

$$\psi_{2,0,0}(\xi,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{Z\xi}{4a_0}\right)\exp\left(-\frac{Z}{2a_0}\xi\right)$$

$$\psi_{2,1,1}(\xi,\theta,\phi)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}}\xi\frac{\exp\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{Z}{2a_0}\xi\right)$$

$$\psi_{2,1,0}(\xi,\theta,\phi)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}}\xi\cos\theta\exp\left(-\frac{Z}{2a_0}\xi\right)$$

$$\psi_{2,1,-1}(\xi,\theta,\phi)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}}\xi\frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{Z}{2a_0}\xi\right)$$

などである. ψ の添え字の第 1 は n の値, 第 2 は軌道角運動量の値, そして第 3 は軌道角運動量の第 3 成分の値である. このほか, 固有値方程式 (6.11) には, 正の固有値をもった散乱状態もある. 詳しくは量子力学の教科書を参照されたい.

§3　電磁場と荷電粒子の相互作用

自由な電磁場と荷電粒子の間の相互作用を導入するには，荷電粒子に Lorentz の力が働くということを原理とする．

そのために，電磁場の同時交換関係 (5.72)，粒子の同時交換関係 (6.1)，および Heisenberg の運動方程式 (5.76)，(6.4) はそのままにしておき，電磁場と荷電粒子の全系の状態ベクトル $\boldsymbol{\Psi}(t)$ を，(5.78)，(6.7) の代わりに，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Psi}(t)=H'(t)\boldsymbol{\Psi}(t) \tag{6.13}$$

と変更する．ただし，

$$H'(t)\equiv H^{(1)}(t)+H^{(2)}(t) \tag{6.14}$$

で，右辺の各項は，電荷 e の粒子のとき，スピンを無視して，

$$H^{(1)}(t)=-\frac{e}{2m}\{\boldsymbol{p}(t)\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}(t),t)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\cdot\boldsymbol{p}(t)\} \tag{6.15 a}$$

$$H^{(2)}(t)=\frac{e^2}{2m}\{\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\} \tag{6.15 b}$$

で与えられる．(6.13) を**相互作用描像における Schrödinger 方程式**という．なぜこのような $H'(t)$ をとるかということは，前にもいったように，こうしておくと Lorentz の力が得られるからである．これはあとで確かめよう．

【蛇足】

この相互作用のとり方は，粒子の Hamiltonian において

$$\boldsymbol{p}(t)\Rightarrow\boldsymbol{p}(t)-e\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}(t),t) \tag{6.16}$$

というおきかえをすることにあたる (拙著『量子力学を学ぶための解析力学入門』，講談社，参照)．そして，このおきかえをすると荷電粒子に Lorentz の力が働く．そうして得られた相互作用 (6.15) を最小電磁相互作用 (minimal electromagnetic interaction) という．ゲージ不変性から (6.16) を導くという立場もあるが，ゲージ不変性は抽象的で，なぜゲージ不変性を使うのかわかりにくい．そのうえ，電磁気的相互作用には，スピンがある場合“最小”でないものもあるから，Lorentz の力を原理にしたほうが，正直なように思う．

相互作用描像の Schrödinger 方程式を満たす状態ベクトルは，ある時間 t_0 の

状態ベクトル $\boldsymbol{\Psi}(t_0)$ を基準にして，ユニタリー演算子を用いて，

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=U(t,t_0)\boldsymbol{\Psi}(t_0) \tag{6.17}$$

と書くことができる．そうすると Schrödinger 方程式は，

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0)=H'(t)U(t,t_0) \tag{6.18}$$

となり，初期条件は，

$$U(t_0,t_0)=1 \tag{6.19}$$

である．

相互作用描像で，ある物理量 $F(x)$ の期待値をとるには，状態ベクトル $\boldsymbol{\Psi}(t)$ で $F(x)$ をはさめばよい．すなわち，

$$(\boldsymbol{\Psi}(t),F(x)\boldsymbol{\Psi}(t))=(\boldsymbol{\Psi}(t_0),U^\dagger(t,t_0)F(x)U(t,t_0)\boldsymbol{\Psi}(t_0)) \tag{6.20}$$

が，相互作用描像における $F(x)$ の期待値である．右辺は，初期の状態ベクトルで書かれている．初期状態は勝手に与えられるから，結局 $U^\dagger(t,t_0)F(x)U(t,t_0)$ を計算することが重要になる．

時間的変化を計算するには，

$$\begin{aligned}&i\hbar\frac{d}{dt}(U^{-1}(t,t_0)F(x)U(t,t_0))\\&=U^{-1}(t,t_0)\left\{i\hbar\frac{d}{dt}F(x)\right\}U(t,t_0)+U^{-1}(t,t_0)F(x)i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0)\\&\quad+i\hbar\frac{d}{dt}U^{-1}(t,t_0)F(x)U(t,t_0)\\&=U^{-1}(t,t_0)\left\{i\hbar\frac{d}{dt}F(x)+[F(x),H'(t)]\right\}U(t,t_0)\end{aligned} \tag{6.21}$$

を計算すればよい．これを用いると，前章の自由な電場の (5.77) から相互作用のあるときの (3.33) を導くことができる (演習問題)．なお，ユニタリー変換 $U(t,t_0)$ について，

$$U(t,t_0)=U(t,t_1)U(t_1,t_0) \tag{6.22}$$

が成り立つ．これも演習問題にしておく．

§4　ユニタリー演算子 $U(t, t_0)$ の摂動論的展開

形式的な議論はともかく，実際の計算では，時間 t_0 と t との状態ベクトルを結びつけるユニタリー演算子 $U(t, t_0)$ を摂動的に取り扱わなければならないことが多い．摂動計算をやるには，まず，$U(t, t_0)$ が微分方程式 (6.18) を満たすから，初期条件 (6.19) をもとに積分形になおす．すなわち，(6.18)，(6.19) は，

$$U(t, t_0)=1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1 H'(t_1)U(t_1, t_0) \tag{6.23}$$

と同等である．この積分方程式を繰り返すと，

$$U(t, t_0)=1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1 H'(t_1)\left\{1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}dt_2 H'(t_2)U(t_2, t_0)\right\} \tag{6.24 a}$$

さらに同じ操作を繰り返すと，

$$U(t, t_0)=1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1 H'(t_1)+\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 H'(t_1)H'(t_2)+\cdots \tag{6.24 b}$$

という展開式が得られる．したがって，$H'(t)$ の効果が小さいと考えられるときには，展開式 (6.24 b) は摂動論的展開式として使うことができる．その例はあとであげる．

展開式 (6.24 b) の右辺第2項の中の $H^{(1)}(t)$ をまず考えてみると，それは，生成・消滅演算子を1つずつ含んでいるから，(5.40) により，

$$(\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda-1), a_\lambda\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda))=\sqrt{n_\lambda} \tag{6.25 a}$$

$$(\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda+1), a_\lambda^\dagger\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda))=\sqrt{n_\lambda+1} \tag{6.25 b}$$

である．したがって，粒子の初期の状態を ψ_a，終状態を ψ_b とすると，$H^{(1)}(t)$ のゼロにならないところは，

$$\begin{aligned}&\langle b, n_\lambda-1|H^{(1)}(t)|a, n_\lambda\rangle\\&=-\frac{e}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega_\lambda}}\sqrt{n_\lambda}[\boldsymbol{e}(\lambda)\cdot\boldsymbol{p}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}(t)}]_{ba}\\&\quad\times\exp[-i(\hbar\omega_\lambda-\varepsilon_b+\varepsilon_a)t/\hbar]\end{aligned} \tag{6.26 a}$$

$$\langle b, n_\lambda+1|H^{(1)}(t)|a, n_\lambda\rangle$$

$$=-\frac{e}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega_\lambda}}\sqrt{n_\lambda+1}[\boldsymbol{e}(\lambda)\cdot\boldsymbol{p}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}(t)}]_{ba}$$
$$\times\exp[i(\hbar\omega_\lambda+\varepsilon_b-\varepsilon_a)t/\hbar] \tag{6.26 b}$$

である．ただし，

$$|a, n_\lambda\rangle\equiv\psi_a\boldsymbol{\Psi}(n_\lambda) \tag{6.27 a}$$
$$\langle b, n_\lambda|\equiv\psi_b{}^\dagger\boldsymbol{\Psi}^\dagger(n_\lambda) \tag{6.27 b}$$

などである．

【蛇足】

ここでは，初期状態と終状態のエネルギーは同じであるとは限らないという点にとくに注意すべきである．量子力学では，時間とエネルギーの間に不確定関係が存在するから，短い時間の間ではエネルギーが保存しないような状態への遷移も可能なのである．長い時間の間では，エネルギーの保存する状態への遷移しか起こらない．事実，すぐあとでみるように，エネルギー保存の条件は，無限に永い時間を問題にするとき出てくる．

なお，運動量のほうは，いつでも保存している．この点はあとでふれる．

相互作用 Hamiltonian の $H^{(2)}(t)$ のほうは，生成・消滅演算子を2個ずつ含んでいるから，少々複雑である．(5.68) を (6.15 b) に代入すると，

$$H^{(2)}(t)=\frac{e^2}{2m\varepsilon_0 V}\sum_\lambda\sum_\mu\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\mu}}\boldsymbol{e}(\lambda)\cdot\boldsymbol{e}(\mu)$$
$$\times\{a_\lambda a_\mu\exp[i(\boldsymbol{k}_\lambda+\boldsymbol{k}_\mu)\boldsymbol{\xi}(t)]\exp[-i(\omega_\lambda+\omega_\mu)t]$$
$$+a_\lambda{}^\dagger a_\mu\exp[i(-\boldsymbol{k}_\lambda+\boldsymbol{k}_\mu)\boldsymbol{\xi}(t)]\exp[-i(-\omega_\lambda+\omega_\mu)t]$$
$$+a_\lambda a_\mu{}^\dagger\exp[i(\boldsymbol{k}_\lambda-\boldsymbol{k}_\mu)\boldsymbol{\xi}(t)]\exp[-i(\omega_\lambda-\omega_\mu)t]$$
$$+a_\lambda{}^\dagger a_\mu{}^\dagger\exp[-i(\boldsymbol{k}_\lambda+\boldsymbol{k}_\mu)\boldsymbol{\xi}(t)]\exp[i(\omega_\lambda+\omega_\mu)t]\} \tag{6.28}$$

となる．これに対して，$\lambda\neq\mu$ のとき，

$$\langle n_\lambda-1, n_\mu-1|a_\lambda a_\mu|n_\lambda, n_\mu\rangle=\sqrt{n_\lambda n_\mu} \tag{6.29 a}$$
$$\langle n_\lambda+1, n_\mu-1|a_\lambda{}^\dagger a_\mu|n_\lambda, n_\mu\rangle=\sqrt{(n_\lambda+1)n_\mu} \tag{6.29 b}$$
$$\langle n_\lambda-1, n_\mu+1|a_\lambda a_\mu{}^\dagger|n_\lambda, n_\mu\rangle=\sqrt{n_\lambda(n_\mu+1)} \tag{6.29 c}$$
$$\langle n_\lambda+1, n_\mu+1|a_\lambda{}^\dagger a_\mu{}^\dagger|n_\lambda, n_\mu\rangle=\sqrt{(n_\lambda+1)(n_\mu+1)} \tag{6.29 d}$$

かつ

$$\langle n_\lambda-2, n_\mu|a_\lambda a_\lambda|n_\lambda, n_\mu\rangle=\sqrt{n_\lambda(n_\lambda-1)} \tag{6.30 a}$$

$$\langle n_\lambda, n_\mu | a_\lambda{}^\dagger a_\lambda | n_\lambda, n_\mu \rangle = n_\lambda \tag{6.30 b}$$

$$\langle n_\lambda, n_\mu | a_\lambda a_\lambda{}^\dagger | n_\lambda, n_\mu \rangle = n_\lambda + 1 \tag{6.30 c}$$

$$\langle n_\lambda + 2, n_\mu | a_\lambda{}^\dagger a_\lambda{}^\dagger | n_\lambda, n_\mu \rangle = \sqrt{(n_\lambda+2)(n_\lambda+1)} \tag{6.30 d}$$

である．これらを（6.28）に用いると必要な行列要素が得られる．

§5　S 行列と遷移確率

以上の数学的道具を用いて，観測量をどうやって計算したらよいであろうか？　たとえば，原子の中の電子があるエネルギー準位 ε_a から低いエネルギー準位 ε_b におち，同時に光子を1個放出する確率，またその反対に，電子が光子を1個吸収して，低いエネルギー準位 ε_b から高いエネルギー準位 ε_a に飛び上がる確率などをどのように計算すればよいであろうか？

(6.17) に戻ってみるとすぐわかることは，ユニタリー変換 $U(t, t_0)$ は，時刻 t_0 の状態ベクトルの時間的な発展を記述しているということである．時刻 t_0 に電磁場と荷電粒子の系が状態 $|a\rangle$ にあったとしよう．この状態は，Hamiltonian

$$H_0 \equiv H_{\mathrm{rad}} + H_{\mathrm{particle}} \tag{6.31}$$

の固有状態で*)，その固有値は E_A である．すなわち

$$H_0|A\rangle = E_A|A\rangle \tag{6.32}$$

固有値 E_A は，一般には荷電粒子のエネルギーと電磁場のエネルギーとの単なる和である．すると時刻 t には，(6.17) によって，状態は $\boldsymbol{\Psi}(t)$ に変わっている．この状態は，いろいろな状態 $|b\rangle$ の線型結合で書かれているはずである．つまり，(6.32) の固有状態は完全系を作っていると仮定する．すると，

$$\boldsymbol{\Psi}_A(t) = U(t, t_0)|A\rangle = \sum_B |B\rangle C_{BA}(t) \tag{6.33}$$

である．ここに，$C_{BA}(t)$ は，初期状態 $|A\rangle$ から出発した状態が時刻 t に状態 $|B\rangle$ に見い出される割合を与える係数で，(6.33) から，

$$C_{BA}(t) = \langle B | U(t, t_0) | A \rangle \tag{6.34}$$

となる．初期状態 $|A\rangle$ から出発した状態が時刻 t に状態 $|B\rangle$ に見い出される確率は，したがって，

---

*　この Hamiltonian は時間によらない．

$$|C_{BA}(t)|^2 = |\langle B|U(t, t_0)|A\rangle|^2 \tag{6.35}$$

である．単位時間にどれだけの変化が起こっているかを知るには，これを遷移の起こる全時間でわって，

$$\text{遷移の単位時間に起こる確率} = |\langle B|U(t, t_0)|A\rangle|^2/(t - t_0) \tag{6.36}$$

となる．

実際にこれを計算するためには，有限の時間を扱うより，第 4 章 §7 でやったように，無限の時間を問題にするほうがやりやすい．そこで $t \to \infty$，$t_0 \to -\infty$ とおいて，**S 行列**を

$$S \equiv U(\infty, -\infty) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H'(t)U(t, -\infty) \tag{6.37}$$

で定義して話を進める．そのためには，(6.37) の右辺を少々変形しておくと便利である．変形する目的は，初期状態と終状態の間ではエネルギーが保存されるということをはっきりと確認しておきたいからである（もちろん，運動量も保存される）．この計算はかなり複雑なのでまず結果を書いておくと：　S 行列は，

$$\langle B|S|A\rangle = \langle B|A\rangle - 2\pi i\delta(E_B - E_A)\langle B|\boldsymbol{R}|A\rangle \tag{6.38}$$

という形に書ける．

さて，その証明にはまず，(6.9)，(6.10) によって，$H'(t)$ の時間依存性を分離し，

$$H'(t) = \exp(iH_0 t/\hbar)H'\exp(-iH_0 t/\hbar) \tag{6.39}$$

と書く．これを (6.37) に代入し，$\langle B|$ と $|A\rangle$ ではさむと，

$$\langle B|S|A\rangle = \langle B|A\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt \langle B|H'\exp[i(E_B - H_0)t/\hbar]U(t, -\infty)|A\rangle \tag{6.40}$$

が得られる．そこで，

$$\boldsymbol{\Psi}_A(E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i(E - H_0)t/\hbar]U(t, -\infty)|A\rangle \tag{6.41 a}$$

を定義し，(6.23) を使うと，この量は，

$$\boldsymbol{\Psi}_A(E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i(E - H_0)t/\hbar]\left\{1 - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \exp(iH_0 t_1/\hbar)H'\right.$$

$$\times \exp(-iH_0 t_1/\hbar)U(t_1, -\infty)\Big\}|A\rangle$$

$$=2\pi\hbar\delta(E-E_A)|A\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{t}dt_1 \exp[i(E-H_0)(t-t_1)/\hbar]H'$$

$$\times \exp[i(E-H_0)t_1/\hbar]U(t_1, -\infty)|A\rangle$$

$$=2\pi\hbar\delta(E-E_A)|A\rangle + \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H'\Psi_A(E) \tag{6.41 b}$$

という式を満たすことがわかる．右辺の第1項が $2\pi\hbar\delta(E-E_A)$ を含むから，

$$\boldsymbol{\Psi}_A(E) \equiv 2\pi\hbar\delta(E-E_A)\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)} \tag{6.42}$$

とおくことができ，$\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)}$ は，

$$\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)} = |A\rangle + \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H'\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)} \tag{6.43}$$

を満たす．(6.42) と (6.41 a) を (6.40) に代入すると (6.38) が得られる．このとき

$$\langle B|\boldsymbol{R}|A\rangle = \langle B|H'\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)}\rangle \tag{6.44}$$

である．これで，(6.38) の証明は終わる．$\boldsymbol{R}$ を求めることは，(6.43) の解を求めることに帰せられる．(6.43) は，Lippmann-Schwinger の方程式として知られているものである．なお，$\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)}$ は，(6.42) によって，$E=E_A$ でないといけない．また，Lippmann-Schwinger の式の中に現れる演算子 H_0 や H' は時間に依存していないということをとくに注意されたい．

(6.43) 式を，Schrödinger 方程式に当てはめてみると，右辺第1項は入射波を，第2項は分母の $i\varepsilon$ のために外向き散乱波を表している（拙著『物性研究者のための場の量子論 I』，培風館，134 頁の例をみよ）．

(6.38) の右辺第1項は遷移に関係がない．第2項が状態 $|A\rangle$ から状態 $|B\rangle$ への遷移を表しているから，その2乗が遷移確率となる．すなわち，

$$\text{遷移確率} = |2\pi i\delta(E_B-E_A)\langle B|\boldsymbol{R}|A\rangle|^2 \tag{6.45}$$

となる．デルタ関数の2乗は次のように処理する：

$$\delta(E_B-E_A)\delta(E_B-E_A)$$

$$=\delta(E_B-E_A)\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dt \exp[i(E_B-E_A)t/\hbar]$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\delta(E_B-E_A)\int_{-\infty}^{\infty}dt \tag{6.46}$$

したがって，単位時間の遷移確率は，

$$w_{BA}=\frac{|2\pi i\delta(E_B-E_A)\langle B|\boldsymbol{R}|A\rangle|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}dt}=\frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_B-E_A)|\langle B|\boldsymbol{R}|A\rangle|^2 \tag{6.47}$$

となり，エネルギーの等しい，互いに異なった初期状態と終状態の間で遷移が起こっていることが明らかになる．

とくに，Lippmann-Schwinger 方程式 (6.43) の右辺の第 2 項を省略すると，摂動論の最低近似が得られ，単位時間の遷移確率は，

$$w_{BA}=\frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_B-E_A)|\langle B|H'|A\rangle|^2 \tag{6.47$'$}$$

となる．この式は，Lippmann-Schwinger の式 (6.47) よりもずっと以前に，摂動論の最低近似として得られたもので，Fermi のゴールデンルールとよばれることがある．次の章ではこれを用いる．

【蛇足】

式(6.47)にいたる計算をもう一度眺めてみる：$\delta(E_A-E_B)$ のために始状態と終状態のエネルギーは等しくなければならない．このデルタ関数が出てきたのは，$-\infty$から∞まで行った時間積分からきている．有限時間の間，とくに短い時間の間ではエネルギーの保存しない状態の間の遷移も可能である．それは前にもちょっとふれたように，量子論の基本仮定から出てくる，時間とエネルギーの間の不確定関係

$$\varDelta E\varDelta t\approx\hbar \tag{6.48}$$

による．したがって，

$$E\varDelta t\gg\hbar \tag{6.49}$$

を満たすような高エネルギーが，永い時間を問題にするかぎり

$$\frac{\varDelta E}{E}\approx\frac{\hbar}{E\varDelta t}\approx 0 \tag{6.50}$$

であるから，エネルギーの不確定は気にしなくてよい．

また，終状態に同一のエネルギーをもった多くの状態があり（たとえば，1 粒子のエネルギーを固定してもいろいろな運動量状態が考えられる），しかも，それらの多くの状態のどれでもよいような過程を計算するときには，(6.47)，(6.47′)にさらに，同一のエネルギーをもった終状態の密度をかけて足し合わせておかなければならない．

演 習 問 題 VI

1. Heisenbergの方程式が，Hamiltonian (6.3) と，交換関係 (6.1) によって，Newtonの方程式と同一な形になることを，本文を見ずに確認せよ．

2. 時間依存性を(6.9)，(6.10)のように書いたとき，電磁場のHeisenberg方程式(5.76)，粒子のHeisenbergの方程式(6.4)が満たされることを確かめよ．

3. エルミートな演算子 F が固有値 f，固有関数 $|f\rangle$ をもつとき，

$$e^{iF}|f\rangle=e^{if}|f\rangle$$

であることを確認せよ．

4. 前問において，$\exp\{iF\}$ はユニタリーであることを示せ．

5. 電荷 e をもった粒子に対して，Hamiltonian

$$H=\frac{1}{2m}\{\boldsymbol{p}(t)-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\}^2+eA_0(\boldsymbol{\xi}(t),t)$$

を採用したとき，$\boldsymbol{\xi}(t)$ と $\boldsymbol{p}(t)$ とのHeisenbergの方程式を計算し，粒子にLorentzの力が働くことを示せ．

6. (6.2) を，本文を見ないで導け．

7. $U(t,t_0)$ の展開式 (6.24 b) の右辺第4項を求めよ．

8. $U(t,t_0)$ の展開式において，電荷 e^2 に比例する項を取り出してみよ．

9. (6.29)，(6.30) を確認せよ．

10. (6.33) から (6.34) を導け．

11. $\boldsymbol{\Psi}_A(E)$ の定義式 (6.41 a) からLippmann-Schwingerの式 (6.43) にいたる計算を自らやってみよ．

12. (6.42) で定義される $\boldsymbol{\Psi}_A{}^{(+)}$ は，Hamiltonian

$$H=H_0+H'$$

の固有関数であることを示せ．

13. (6.46) を確認せよ．$\hbar$ への依存性に気をつけよ．

14. Fermiのゴールデンルールを，Lippmann-Schwingerの式を用いないで，$U(t, t_0)$の展開式の右辺第2項から直接導いてみよ．ただし$|t-t_0|$は無限に大きいとする．

15. (6.44) の$\langle B|\boldsymbol{R}|A\rangle$の2次の項を求めよ．

第7章　電磁場と荷電粒子相互作用の簡単な例

§1　は じ め に

前2章では，自由な電磁場の量子論，荷電粒子の量子論およびそれらの相互作用を取り扱う方法を簡単に議論した．電磁場の量は，交換関係 (5.72 a) を満たし荷電粒子のほうは交換関係 (6.1) を満たす1対の変数で書かれている．それらの被演算子としての状態ベクトルは，相互作用描像における Schrödinger 方程式 (6.13) に従って時間的に変わっていく．これで，いろいろな物理量を取り扱う数学的道具は十分なのである．

物理量に対する Heisenberg の運動方程式は，角振動数とエネルギーとの間の関係を保証する一方，Maxwell 方程式や Newton の方程式の知識も含んでいる．

物理系の，ある状態から別の状態への遷移の確率を求めるには，(6.17) の変換関数 $U(t, t_0)$ を，初期状態と終状態ではさみ，それを2乗すればよい ((6.35) をみよ)．実際，計算には，$t\to\infty$, $t_0\to-\infty$ として，S 行列を定義するほうが計算がやさしい．S 行列で遷移確率を求めるには，Feynman 図形によって形式的に計算を実行する方法があるが，ここではそれを紹介しないで，Lippmann-Schwinger 方程式 (6.43) を用いる．

単位時間における遷移確率は，Feynman の方法であれ，Lippmann-Schwinger の方法であれ，いずれにしろ，(6.47) で与えられる．とくに相互作用が小さいと考えられるときには，摂動論の最低近似の式，Fermi のゴールデンルールがよく用いられる．

次の節では，その2,3の例をあげる．§3と§4では，摂動の第2項を考慮しないと取り扱えない光子の散乱などを調べよう．

最後の章では，摂動論を改良した Wigner-Weisskopf の方法を用いて，スペクトル線の幅とずれを考えてみよう．

§2　原子内の電子による光子の放出と吸収

前章の理論の応用として，原子の中の電子による，1 個の光子の放出と吸収の確率を計算してみる．

いま，原子の中の電子の 2 つのエネルギー準位 $\varepsilon_a > \varepsilon_b$ を考えよう．放出のほうは，はじめに高いほうの準位 ε_a にあった電子が，低いほうの準位 ε_b におち，余分のエネルギーを 1 個の光子として放出する過程である．

一方，吸収のほうは，はじめに電子が低いほうの準位 ε_b にあり，外からきた，適当なエネルギーをもった 1 個の光子を吸収して高いほうの準位 ε_a に飛び上がる過程である．エネルギーは保存されるから，1 個の光子の吸収過程でも，放出過程でも

$$\varepsilon_a - \varepsilon_b = \hbar\omega_\lambda \tag{7.1}$$

が成り立たなければならない．これは前章に展開した理論により，結果として出てくる．

（1）　光子の放出

モード λ の光子が n_λ 個と原子の中のエネルギー準位 ε_a に電子が 1 個ある初期状態

$$|a, n_\lambda\rangle \equiv \psi_a \Psi(n_\lambda) \tag{7.2}$$

と，モード λ の光子が 1 個増えて $n_\lambda+1$ 個になり，低いほうの準位 ε_b におちた終状態

$$|b, n_\lambda+1\rangle \equiv \psi_b \Psi(n_\lambda+1) \tag{7.3}$$

を考えよう（図 7.1）．

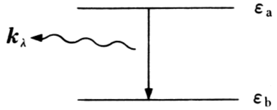


図 7.1

この計算に必要な量は，すでに（6.26 b）で与えられている．(6.28）で与えられる $H^{(2)}$ のほうは，(6.29)，(6.30) からわかるように，1個の光子の吸収，放出には直接寄与しないばかりでなく，前に e^2 がかかっているから，e のかかった $H^{(1)}$ より，一般的には小さい．

そこで（6.26 b）を，Fermi のゴールデンルールの式（6.47′）に代入すると，1個の光子が単位時間に放出される確率は，

$$w_{a,n_\lambda\to b,n_\lambda+1}=\frac{2\pi}{\hbar}\delta(\varepsilon_a-\varepsilon_b-\hbar\omega_\lambda)\times\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\frac{n_\lambda+1}{\omega_\lambda}\left|\left[\frac{e}{m}\boldsymbol{e}(\lambda)\cdot\boldsymbol{p}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}\right]_{ba}\right|^2 \tag{7.4}$$

となる（電子の電荷は $-e$ だが，ここで用いる近似では，確率の計算にはこの符号の違いは効かない．以下いちいちこのことを注意しない）．

この確率は $n_\lambda+1$ に比例している．はじめからまわりにあった光子の数 n_λ に比例する項を**誘導放出**（stimulated emission）とよび，はじめに光子が1つもない $n_\lambda=0$ のときにも残る項を**自然放出**（spontaneous emission）という．

ここでは，自然放出のほうだけを調べる．それには，(7.4) で $n_\lambda=0$ とおけばよい．

何もないところへ飛び出していく光子の波数ベクトルもその偏りも問題にしないときには，その式で波数ベクトルと偏りについて和をとればよい．指定されているのは，電子のはじめのエネルギー準位 ε_a と終わりのエネルギー準位 ε_b だけである．すると，得られるのは，

$$w_{a\to b}=\frac{1}{V}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\varepsilon_a-\varepsilon_b-\hbar\omega_k)\times\frac{\pi}{\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_k}\left|\left[\frac{e}{m}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{p}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}\right]\right|^2 \tag{7.5}$$

である．そこで図7.2のように，光子の偏りの方向を第1軸に，また光子の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向を第3軸にとり，電子の運動量 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{k}$ のなす角を θ とすると，

$$\sum_{r=1,2}(\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{p})$$

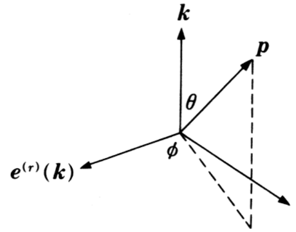


図7.2

$$=\boldsymbol{p}^2-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})^2}{\boldsymbol{k}^2}=\boldsymbol{p}^2(1-\cos^2\theta)=\boldsymbol{p}^2\sin^2\theta \tag{7.6}$$

となるから，これを (7.5) に代入する．次に，$\boldsymbol{k}$ に関する和は，(5.48) によって積分でおきかえる．それでもまだ (7.5) の $\exp(-\boldsymbol{k\xi})$ が邪魔になって，積分ができない．しかし，原子の大きさを a の程度とすると，

$$\varepsilon\approx\hbar\omega\approx\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{7.7 a}$$

のオーダーである (129 頁の脚注をみよ)．したがって，

$$k\xi\approx ka=\frac{\omega a}{c}\approx\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=\frac{1}{137} \tag{7.7 b}$$

はこの場合きわめて小さいから，問題の指数関数は 1 とおいてもよいだろう．これを**電気双極子近似**とよぶ (“電気双極子” とよぶ理由については，(7.11′) をみよ)．

したがって，電気双極子近似においては，(7.5) は，

$$w_{a\to b}=\frac{\pi}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\frac{1}{\omega_k}\left|\frac{e}{m}\boldsymbol{p}_{ba}\right|^2\sin^2\theta\,\delta(\varepsilon_b+\hbar\omega_k-\varepsilon_a) \tag{7.8}$$

まず，角以外の積分をすると，

$$w_{a\to b}=\frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{\omega_{ba}}{\hbar c^3}\left|\frac{e}{m}\boldsymbol{p}_{ba}\right|^2\sin^2\theta\,d\Omega_k \tag{7.9}$$

となる．ただし

$$\omega_{ba}\equiv\frac{1}{\hbar}(\varepsilon_a-\varepsilon_b) \tag{7.10}$$

とおいた．次に角積分を遂行すると，光子放射の単位時間の全確率は，

$$\bar{w}_{a\to b}=\frac{1}{3\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_{ba}}{\hbar c^3}\left|\frac{e}{m}\boldsymbol{p}_{ba}\right|^2 \tag{7.11}$$

となる．

なお，この式は，Heisenberg の運動方程式を用いると，電気双極子能率で書けて，

$$\bar{w}_{a\to b}=\frac{1}{3\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_{ba}{}^3}{\hbar c^3}|e\xi_{ba}|^2 \tag{7.11$'$}$$

という形になる（演習問題）．

さらに，この式に $\hbar\omega_{ba}$ をかけると，単位時間に放出される光子のエネルギー

$$R_{a\to b}=\frac{1}{3\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_{ba}{}^4}{c^3}|e\xi_{ba}|^2 \tag{7.12}$$

が得られ，表面から Planck の定数が消えてしまう．これを，古典電磁気学における式（4.109），（4.144）などと比べてみるとおもしろい．

（2）　光子の吸収過程

次に，1個の光子が，原子内の電子によって吸収され，電子がエネルギー準位 ε_b から，高いほうのエネルギー準位 ε_a へ飛び上がる過程を考えよう．この場合，初期状態は，

$$|b,n_\lambda\rangle\equiv\psi_b\Psi(n_\lambda) \tag{7.13 a}$$

で終状態は，

$$|a,n_\lambda-1\rangle\equiv\psi_a\Psi(n_\lambda-1) \tag{7.13 b}$$

であるから，(6.26) を考慮すればよい．したがって，吸収の単位時間における確率は，

$$\begin{aligned}w_{b,n_\lambda\to a,n_\lambda-1}=&\frac{2\pi}{\hbar}\delta(\varepsilon_a-\varepsilon_b-\hbar\omega_\lambda)\\&\times\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}\frac{n_\lambda}{\omega_\lambda}\left|\left[\frac{e}{m}\boldsymbol{e}(\lambda)\cdot\boldsymbol{p}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}\right]_{ab}\right|^2\end{aligned} \tag{7.14}$$

であって，誘導放出の式とほとんど同じである．

終状態は，$\varepsilon_a-\varepsilon_b$ にきわめて近いエネルギーと，ある立体角 $d\Omega_k$ 内の方向をもつ光子のどれか1つが1個だけ吸収されるのだから，その状態の数

$$\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k=\frac{V}{(2\pi)^3}k^2dk\,d\Omega_k=\frac{V}{(2\pi c)^3}\omega^2\,d\omega\,d\Omega_k \tag{7.15}$$

をかけて，前と同じく，電気双極子近似を採用する．さらに電子の向きについて平均して，

$$|[\boldsymbol{e}(\lambda)\cdot\boldsymbol{\xi}]_{ab}|^2=\frac{1}{3}|\boldsymbol{\xi}_{ab}|^2 \tag{7.16}$$

とすると，ω に関する積分ができて，

$$\bar{w}_{b\to a}=\frac{\omega_{ba}{}^3\bar{n}_\omega}{24\pi^2\varepsilon_0\hbar c^3}|e\boldsymbol{\xi}_{ab}|^2 d\Omega_k \tag{7.17}$$

となる．ここに，$\bar{n}_\omega$ は，角振動数 ω_{ba} をもった入射光子の数の平均値である．

立体角 $d\Omega_k$ の方向に入射する，角振動数 ω と $\omega+d\omega$ の間の，一定の偏りの光子の強さを $I_0(\omega)d\omega$ とすると，

$$I_0(\omega)d\omega=\frac{c}{V}\hbar\omega\bar{n}_\omega\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k=\frac{\hbar c\omega^3\bar{n}_\omega}{(2\pi c)^3}d\omega\, d\Omega_k \tag{7.18}$$

である．そこで，電気双極子近似の式 (7.17) に $\hbar\omega_{ba}$ をかけると，単位時間に電子の遷移 $b\to a$ によって吸収される光子のエネルギーは，

$$\begin{aligned} R_{b\to a}=\hbar\omega_{ba}\bar{w}_{b\to a}&=\frac{4\pi^2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\omega_{ba}|\boldsymbol{\xi}_{ab}|^2 I_0(\omega_{ba}) \\ &=\frac{4\pi^2\alpha}{3}\omega_{ba}|\boldsymbol{\xi}_{ab}|^2 I_0(\omega_{ba}) \end{aligned} \tag{7.19}$$

となる．

（3） 光電効果

入射光子のエネルギー $\hbar\omega_k$ が，原子の中の電子を外へ飛び出させるほど十分大きいとき，光電効果が起きる．光電効果によって飛び出す電子の数は入射光子の数に比例する．前に計算した光子吸収の確率（7.14）において，終状態を自由な電子状態とすれば，光電効果は原理的に同様に取り扱うことができる．

Einstein によると，放出される電子のエネルギー ε は，

$$\varepsilon=\hbar\omega_k-I \tag{7.20}$$

である．ただし，I は，電子が原子から電離されるのに必要なエネルギーである．これは，光子の存在によるエネルギーの保存則である．

放出される電子の数が入射光子の数に比例するということは，(7.14)から明らかであろう．

いま，水素型原子の最低エネルギー状態にある電子が，1個の光子を吸収して原子外へ飛び出し，自由電子になる場合を考える．電子の初期状態は第6章に出てきた

$$\psi_{1,0,0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{Z}{a_0}\xi\right) \tag{7.21}$$

で，終状態は自由電子の平面波

$$\psi_{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}} \tag{7.22}$$

である（ただしここでは，余計な記号を避けるため自由電子の運動量を単に $\boldsymbol{p}$ と書いた．したがって，電子の波数ベクトルは $\boldsymbol{p}/\hbar$ である．第6章の演算子の $\boldsymbol{p}$ と混同しないように．ここの $\boldsymbol{p}$ は，演算子の $\boldsymbol{p}$ の固有値である）．

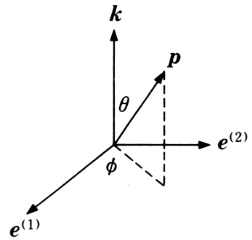


図7.3

そこで，図7.3のような角をとると，偏りのベクトルと電子の運動量 $\boldsymbol{p}$ のスカラー積は，

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}=p\sin\theta\cos\phi \tag{7.23}$$

である．一方，光子の吸収によって原子の受ける反跳（recoil）は，

$$\varDelta\boldsymbol{p}\equiv\hbar\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p} \tag{7.24}$$

であるから，

$$(\varDelta\boldsymbol{p})^2=\boldsymbol{p}^2+\hbar^2k^2-2\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^2+\hbar^2k^2-2\hbar k\cdot p\cos\theta \tag{7.25}$$

となる．

飛び出す電子は非相対論的に扱うから，

$$mc^2 \gg \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 \tag{7.26}$$

かつ

$$\hbar\omega_k \gg I = \frac{Z^2 me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \tag{7.27}$$

が満たされている．

飛び出す電子が一定のスピンをもち，運動量が $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}$ の間にある状態の数は，

$$\rho_e(\varepsilon)d\varepsilon\, d\Omega_p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}m\sqrt{2m\varepsilon}\,d\varepsilon\, d\Omega_p \tag{7.28}$$

である．したがって，エネルギー ε をもった電子が 1 個の光子によって，立体角 $d\Omega_p$ の方向に放出される，単位時間の確率は，(7.14) から，

$$\begin{aligned}
w\, d\Omega_p &= \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\pi}{\varepsilon_0 V\omega_k}\delta(I-\hbar\omega_k+\varepsilon)\rho_e(\varepsilon)d\varepsilon\, d\Omega_p \\
&\quad\times\left|\frac{1}{\sqrt{V}}\int_V d^3\xi \exp(-i\boldsymbol{p\xi}/\hbar)\, e^{i\boldsymbol{k\xi}}\boldsymbol{k}\cdot e\psi_0(\xi)\right|^2 \\
&= \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\pi}{\varepsilon_0 V\omega_k}\delta(I-\hbar\omega_k+\varepsilon)\rho_e(\varepsilon)d\varepsilon\, d\Omega_p \\
&\quad\times\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5 \frac{64\pi\hbar^8}{\left[(\Delta p)^2+\left(\frac{Z\hbar}{a_0}\right)^2\right]^4}p^2\sin^2\theta\cos^2\phi
\end{aligned} \tag{7.29}$$

である．ただし，電子の始状態関数 (7.21) を単に $\psi_0(\xi)$ と書いて，積分公式

$$\frac{1}{V}\int_V d^3\xi e^{-i\boldsymbol{k\xi}}e^{-\mu\xi} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\mu}{(k^2+\mu^2)^2} \qquad (\mu>0) \tag{7.30}$$

を用いた．

確率の式 (7.29) を，入射光子の流束 V/c でわると，電子放出の微分断面積が得られ，それは，

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\frac{c^2}{\hbar\omega_k}\frac{1}{m}(2m\varepsilon)^{3/2}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5 \\
&\quad\times\frac{32\pi\hbar^5}{\left[(\Delta p)^2+\left(\frac{Z\hbar}{a_0}\right)^2\right]^4}\sin^2\theta\cos^2\phi\, d\Omega_p
\end{aligned} \tag{7.31}$$

である．ここまでは，摂動の最低近似の正確な式である．

この式は複雑だが，飛び出す電子の方向はよくわかる．入射光子の偏りの方向（$\theta=\pi/2, \phi=0$）の方向に大部分の電子が放出される．光子の入射方向（$\theta=0$）には，電子は全然出ない．分母には（7.25）があるから電子放射の方向分布は光子の入射方向に対して対称ではなく，前方へ少し多く出ることがわかる．

なお，電子の速度 $\boldsymbol{p}/m=\boldsymbol{v}$ が光速に比べて小さいので，v^2 以上の項を無視すると，上の（7.31）は，

$$d\sigma=r_0{}^2Z^5\alpha^4\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_k}\right)^{\frac{7}{2}}\frac{4\sqrt{2}\sin^2\theta\cos^2\phi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4}d\Omega_p \tag{7.32}$$

と簡単になる．

§3　電子による光子の散乱

第4章§9で議論したように，古典電磁気理論によると，電磁波が自由電子によって散乱される場合，入射波と散乱波は同じ波長をもつ．しかし，光子という“粒”を考えると，事情は変わる．散乱波の波長は入射のそれより長くなる．これは，**Compton 効果**として知られた現象で，古典電磁気理論ではどうしても説明できなかった．

ここでは，エネルギーと運動量をもった“つぶ”としての光子を考えることにより，エネルギーと運動量の保存則だけから散乱波の波長が長くなることをまず示そう．

図7.4のように，はじめ静止している電子に，エネルギー $\hbar\omega_0$，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}_0$ の光子が入射し，電子が運動量 $\boldsymbol{p}$ の反跳を受けて，光子のほうは，エネルギー $\hbar\omega$,

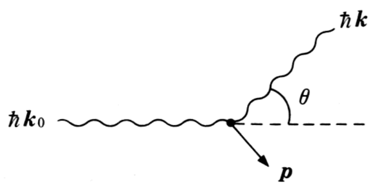


図7.4

運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ に変化したとしてみよう．すると，エネルギーの保存則は，

$$\hbar\omega_0=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2+\hbar\omega \tag{7.33}$$

であり，運動量の保存則は，

$$\hbar\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k} \tag{7.34}$$

である．光子には $\omega=ck$ という関係があるから，上の2式から

$$k_0-k=\frac{\hbar}{2mc}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2\geq 0 \tag{7.35}$$

この式を k_0k でわってやると，

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k_0}=\frac{\hbar}{2mc}\left\{\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-2\cos\theta\right\}\geq 0 \tag{7.36}$$

となる．波長 λ と波数 k とは，

$$\frac{1}{k}=\frac{\lambda}{2\pi} \tag{7.37}$$

で結ばれているから，(7.36) は，波長で書くと，

$$\lambda-\lambda_0=\frac{h}{2mc}\left\{\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{\lambda_0}{\lambda}-2\cos\theta\right\}\geq 0 \tag{7.38}$$

であって，散乱光子の波長は $\theta=0$ のとき以外は，いつでも入射光子のものより長くなっている（$\theta=0$ というのは，入射光子が荷電粒子と相互作用しないで素通りするということである）．この結果は光量子論に特有なことで，事実，(7.38) の右辺には Planck の定数が入っているから，それをゼロとすると $\lambda=\lambda_0$ となり，古典論の結果に戻る．さて，与えられた相互作用 (6.15) から散乱の断面積をどのように計算するか？

$H^{(1)}$ は電荷 e に比例し，それは光子の生成・消滅演算子を1個ずつの和で含んでいるから，光子を1個消すか1個増やすかのどちらかしかできない．だからこれだけでは，光子が1個吸われて，1個放出される散乱問題は扱えない．一方，$H^{(2)}$ のほうは電荷 e^2 に比例し，生成演算子と消滅演算子の積を含んでいる．これで，光子の散乱が扱える．

Lippmann-Schwinger の方程式 (6.43) を繰り返し，e のべきに展開すると，

$$H'\boldsymbol{\Psi}_A^{(+)}=H'\left\{|A\rangle+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H'\boldsymbol{\Psi}_A^{(+)}\right\}$$

$$=\left\{H^{(1)}+H^{(2)}+H^{(1)}\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H^{(1)}\right\}|A\rangle+O(e^3) \tag{7.39}$$

となるから，光子散乱には，右辺第1項は効かない．第2項は前にいった理由により，光子散乱の遷移要素を与える．第3項も生成演算子と消滅演算子の積を含むから，光子散乱に効くかもしれない．つまり，光子散乱の遷移の計算には，少なくとも，e^2 のオーダーでは，右辺第2項と第3項を計算しなければならない．その計算を以下でやってみよう．

まず，右辺第2項の計算は次のようにやる．

初期状態として，電子が運動量 $\boldsymbol{p}_0$ をもち，偏り i，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}_i$ の光子のある状態

$$|\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{k}_i, i\rangle\equiv|I\rangle \tag{7.40 a}$$

をとり，終状態として，電子が運動量 $\boldsymbol{p}$ をもち，偏り f, 運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の光子のある状態

$$|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, f\rangle\equiv|F\rangle \tag{7.40 b}$$

を採用する．すると（6.28）は，

$$\begin{aligned}\langle F|H^{(2)}|I\rangle=&\frac{e^2}{2m\varepsilon_0 V}\sum_{r=1,2}\sum_{s=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\ell}}\sqrt{\frac{\hbar^2}{4\,\omega_{\boldsymbol{k}'}\omega_{\boldsymbol{\ell}}}}(e^{(r)}(\boldsymbol{k}')\cdot e^{(s)}(\boldsymbol{\ell}))\\&\times\{\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}^{(f)}a_{\boldsymbol{k}'}^{(r)\dagger}a_{\boldsymbol{\ell}}^{(s)}a_{\boldsymbol{k}_i}^{(i)\dagger}|0\rangle\langle\boldsymbol{p}|e^{-i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{\ell})\boldsymbol{\xi}}|\boldsymbol{p}_0\rangle\\&+\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}^{(f)}a_{\boldsymbol{k}'}^{(r)}a_{\boldsymbol{\ell}}^{(s)\dagger}a_{\boldsymbol{k}_i}^{(i)\dagger}|0\rangle\langle\boldsymbol{p}|e^{i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{\ell})\boldsymbol{\xi}}|\boldsymbol{p}_0\rangle\}\end{aligned} \tag{7.41}$$

しかし，

$$\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}^{(f)}a_{\boldsymbol{k}'}^{(r)\dagger}a_{\boldsymbol{\ell}}^{(s)}a_{\boldsymbol{k}_i}^{(i)\dagger}|0\rangle=\delta_{\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{\ell}}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{f,r}\delta_{i,s} \tag{7.42 a}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}^{(f)}a_{\boldsymbol{k}'}^{(r)}a_{\boldsymbol{\ell}}^{(s)\dagger}a_{\boldsymbol{k}_i}^{(i)\dagger}|0\rangle&=\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}^{(f)}a_{\boldsymbol{\ell}}^{(s)\dagger}a_{\boldsymbol{k}'}^{(r)}a_{\boldsymbol{k}_i}^{(i)\dagger}|0\rangle\\&\quad+\delta_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\ell}}\delta_{r,s}\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}^{(f)}a_{\boldsymbol{k}_i}^{(i)\dagger}|0\rangle\\&=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}}\delta_{f,s}+\delta_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\ell}}\delta_{r,s}\delta_{\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}}\delta_{f,i}\end{aligned} \tag{7.42 b}$$

となるが，この式の右辺第2項は，入射光子が荷電粒子と相互作用しないで素通りする項であるから，考えなくてもよい．また，付録の式(A.14.12)により運動量保存則

$$\langle\boldsymbol{p}|e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\ell})\boldsymbol{\xi}}|\boldsymbol{p}_0\rangle=\delta_{\boldsymbol{p}_0+\hbar\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}} \tag{7.42 c}$$

を使うと，結局，$H^{(2)}$ による単位時間の光子の散乱の確率を与える量は，

$$\langle F|H^{(2)}|I\rangle=\frac{e^2}{2m\varepsilon_0 V}\frac{2\hbar}{\sqrt{4\omega_{k_i}\omega_k}}e^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)\cdot e^{(f)}(\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{p}_0+\hbar\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}} \tag{7.43}$$

となる．

(7.39) の右辺第3項を計算するために，まず，“中間状態”という概念を説明しておかなければならない．いま

$$H''=H^{(1)}\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H^{(1)} \tag{7.44}$$

とおく．これは，3個の演算子の積からなっている．これを計算する場合，自由な Hamiltonian H_0 の固有値問題

$$H_0|E_C,\alpha_C\rangle=E_C|E_C,\alpha_C\rangle \tag{7.45}$$

をまず解く．ここで，α_C というのは，同一のエネルギーをもつ，異なった状態を指定するためにつけた添え字である．これらの固有ベクトルは規格化直交しており，

$$\langle E_C,\alpha_C|E_{C'},\alpha_{C'}\rangle=\delta_{E_C,E_{C'}}\delta_{\alpha_C,\alpha_{C'}} \tag{7.46}$$

であるとする．また，これらは完全系を作っていると仮定すると，

$$\sum_C\sum_{\alpha_C}|E_C,\alpha_C\rangle\langle E_C,\alpha_C|=I \tag{7.47}$$

である．

さて，この完全系の条件 (7.47) を，(7.44) の3個の演算子の間にはさむと，

$$\langle F|H''|I\rangle=\sum_C\sum_{\alpha_C}\langle F|H^{(1)}|E_C,\alpha_C\rangle\frac{1}{E-E_C+i\varepsilon}\langle E_C,\alpha_C|H^{(1)}|I\rangle \tag{7.48}$$

と書くことができる．この場合，状態 $|E_C,\alpha_C\rangle$ を“中間状態”(intermediate state) とよぶ．中間状態のエネルギーは初期や終状態のエネルギーと等しくないものまで含まれている．いいかえると，中間状態と初期状態の間では，必ずしもエネルギー保存則が満たされていなくてもかまわない．

前にもいったように，これはエネルギーと時間の間に成り立つ不確定関係による．一方，粒子や光子の位置のほうは全然指定してないから，運動量の保存則は，中間状態でも厳密に成り立っている（次の具体的な例をみよ）．

さて，具体的に式 (6.15 a) を用いて電子による光子の散乱過程の行列要素を計算してみよう．初期状態と終状態とは，それぞれ (7.40 a)，(7.40 b) である．

中間状態としては，$H^{(1)}$ は，光子の生成・消滅演算子の和になっているから，入射光子が吸われて，光子が存在せず電子が運動量 $\boldsymbol{q}$ になった状態

$$|\boldsymbol{q}\rangle \tag{7.49}$$

および，波数ベクトル $\boldsymbol{k}'$，偏り r'，波数ベクトル $\boldsymbol{k}''$，偏り r'' をもった2個の光子と，運動量 $\boldsymbol{q}$ をもった1個の電子がある状態

$$|\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''\rangle = a_{k'}^{(r')\dagger} a_{k''}^{(r'')\dagger}|\boldsymbol{q}\rangle \tag{7.50}$$

だけが可能である．

上の2つの場合，中間状態エネルギーは，それぞれ

$$E_C = \frac{1}{2m}\boldsymbol{q}^2 \tag{7.49'}$$

$$E_C = \frac{1}{2m}\boldsymbol{q}^2 + \hbar\omega_{k_i} + \hbar\omega_k \tag{7.50'}$$

である．かくて，(7.42 c) の計算に必要な量は，

$$\langle \boldsymbol{q}|H^{(1)}|\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{k}_i, i\rangle$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k_i}}}\langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\exp(i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{p}_0\rangle \boldsymbol{e}^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k_i}}}\boldsymbol{e}^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{q}\delta_{\boldsymbol{p}_0+\hbar\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{q}} \tag{7.51 a}$$

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, f|H^{(1)}|\boldsymbol{q}\rangle$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k_i}}}\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\exp(-i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{q}\rangle \boldsymbol{e}^{(f)}(\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k_i}}}\boldsymbol{e}^{(f)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{q}\delta_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}_f,\boldsymbol{q}} \tag{7.51 b}$$

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, f|H^{(1)}|\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''\rangle$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\left\{\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k'}}}\boldsymbol{e}^{(r')}(\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{q}\,\delta_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}\delta_{r'',f}\,\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}''}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k''}}}\boldsymbol{e}^{(r'')}(\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{q}\,\delta_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{q}}\delta_{r',f}\,\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\right\} \tag{7.52 a}$$

$$\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''|H^{(1)}|\boldsymbol{p}_0,, \boldsymbol{k}_i, i\rangle$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\left\{\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k'}}}\boldsymbol{e}^{(r')}(\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{q}\,\delta_{\boldsymbol{p}_0-\hbar\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}\delta_{r'',i}\,\delta_{\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}''}\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k''}}}\boldsymbol{e}^{(r'')}(\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{q}\,\delta_{\boldsymbol{p}_0-\hbar\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{q}}\,\delta_{r',i}\,\delta_{\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}'}\Bigg\} \tag{7.52 b}$$

である．(7.42 c) と類似の関係によって，初期，中間，終状態の間の運動量はすべて同じであることに注意されよ．

上の式 (7.49′)，(7.50′)，(7.51)，(7.52) を使って，(7.44) を $\langle F|$ と $|I\rangle$ ではさみ，例によって，光子が素通りする項を省くと，

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, f|H^{(1)}\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H^{(1)}|\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{k}_i, i\rangle\\
&=\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{1}{\varepsilon_0 V}\sqrt{\frac{\hbar^2}{4\omega_k\omega_{k_i}}}(\boldsymbol{e}^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{p}_0)(\boldsymbol{e}^{(f)}(\boldsymbol{k}_f)\cdot\boldsymbol{p})\\
&\times\frac{\delta_{\boldsymbol{p}_0+\hbar\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}}}{E-\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_0+\hbar\boldsymbol{k}_i)^2+i\varepsilon}\\
&+2\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{1}{\varepsilon_0 V}\sqrt{\frac{\hbar^2}{4\omega_k\omega_{k_i}}}(\boldsymbol{e}^{(f)}(\boldsymbol{k}_f)\cdot\boldsymbol{p}_0)(\boldsymbol{e}^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{p})\\
&\times\frac{\delta_{\boldsymbol{p}_0+\hbar\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}}}{E-\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_0-\hbar\boldsymbol{k})^2-\hbar\omega_{k_i}-\hbar\omega_k+i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{7.53}$$

が得られる．右辺の第1項は，入射光子が電子に吸われて，それから散乱光子を発射する項，第2項は，入射光子が電子に吸われる前に，散乱光子が発射される項で，Feynman 図形で描くと，それぞれ図 7.5，図 7.6 のようになる．

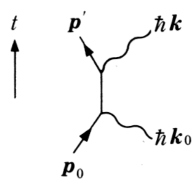


図 7.5

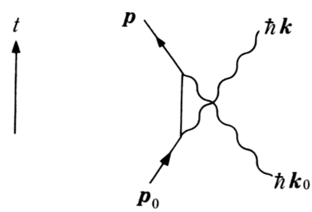


図 7.6

この式と，前に求めた $H^{(2)}$ の (7.43) を加え合わせて2乗すれば，散乱の確率が計算できるはずだが，それをやるのは大変やっかいである．

ところで，(7.53)をよく眺めてみると，大変つごうのよいことがある．それは，最初に電子が静止していると，つまり，$\boldsymbol{p}_0=0$ とおくと (7.53) はゼロになってしまうということである．したがって，静止している電子による散乱を扱うには，前に計算した (7.43) だけ考慮すればよい．かくて，静止した電子による散乱の単位時間の確率は，

$$w_{\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{k}_0\to\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{e^2}{2m\varepsilon_0 V}\right)^2\frac{2^2\hbar^2}{4\omega_{\boldsymbol{k}_i}\omega_{\boldsymbol{k}}}\left|\boldsymbol{e}^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{e}^{(f)}(\boldsymbol{k})\right|^2$$
$$\times\delta\left(\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2+\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}-\hbar\omega_{\boldsymbol{k}_i}\right)\delta_{\hbar\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}} \tag{7.54}$$

となる．分子にある 2^2 というのは，(7.42 a) と (7.42 b) とが同じ寄与をするからである．2 行目のデルタ関数のために，入射波と散乱波の波長が異なることは一目瞭然である（式 (7.33) を見よ）．

入射波の偏りがわからないときには，$i=1,2$ について平均をとり，散乱波の偏りがどうでもよいときは，$f=1,2$ について和をとる．すると，偏りのベクトルの完全性により，

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{f=1,2}|e^{(i)}(\boldsymbol{k}_i)\cdot e^{(f)}(\boldsymbol{k})|^2=\frac{1}{2}\{1+\cos^2\theta\} \tag{7.55}$$

である．ただし θ とは，入射波と散乱波の波数ベクトルのなす角である．

単位時間の確率の式 (7.54) を，入射光子の流束 c/V でわり，終状態の光子のモードの数について和をとると，散乱の断面積が得られる．しかし，この計算は，デルタ関数の中が複雑なために意外にやっかいである．

ここでは，デルタ関数の中の電子の項を無視して計算し，それが古典的な Thomson の式と一致することを確かめておくとよい（演習問題）．結果は，

$$\sigma_{\mathrm{T}}=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2=\frac{8\pi}{3}r_0{}^2 \tag{7.56}$$

となるはずである．なお，ここでは非相対論的な計算をしたが，相対論的にちゃんとやると，よく知られた Klein-Nishina の式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}r_0{}^2\frac{k^2}{k_0{}^2}\left\{\frac{k}{k_0}+\frac{k_0}{k}-\sin^2\theta\right\} \tag{7.57}$$

が得られる．この Klein-Nishina の公式には，電子のスピンも考慮し，Dirac の

相対論的電子の方程式を使う．そして最後に，初期状態の電子のスピンや光子の偏りについては（わからないので）平均を，また終状態のそれらについては（どうでもよいので）和をとった結果である．

§ 4　制動輻射（Bremsstrahlung）

摂動論の2次の計算のもう1つの例として，電子がポテンシャルによって曲げられ1個の光子を放出する過程を取り扱う．

自由な光速より遅い電子は，そのままでは，エネルギーと運動量保存の制限のため，光子を発射することができない．

どうせ，電子の速度は光速より遅いに決まっているではないか！　という気がするかもしれないがそうではない．物質の中では光速は c より遅くなる．物質の屈折率を n とすると，光の速度は c/n で，たとえばゲルマニウムでは，$n=4.092$ にも達する．したがって，電子が光の速度より速く飛び込むことは可能である．すると，光子が発射される．これは，Cherenkov 放射として知られている現象である．

また，もし，電子に外場がかかっていて運動量を適当に調節してくれると，1個の光子の発射が可能になる．これを**制動輻射**（Bremsstrahlung）とよぶ．重い原子核のそばを電子が通過するときなど，この現象が起こる．

制動輻射の起こる確率を計算してみよう．まず，自由な Hamiltonian として，

$$H_0=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2+H_{\mathrm{rad}} \tag{7.58}$$

をとる．相互作用 Hamiltonian は，ポテンシャルをも含めて，

$$H'=U+H^{(1)}+H^{(2)} \tag{7.59}$$

ただし，ここでポテンシャル U は電子に働くもので，簡単のため球対称であると仮定しておく．たとえば，Coulomb ポテンシャルならば，

$$U=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\xi}=\frac{Ze^2}{\varepsilon_0 V}\sum_{\ell}\frac{1}{\ell^2}e^{i\ell\xi} \tag{7.60}$$

また，$H^{(1)}$ と $H^{(2)}$ とは，それぞれ(6.15a)，(6.15b)である．これを Lippmann-Schwinger の式に入れて展開すると，

$$H'\boldsymbol{\Psi}_A^{(+)}=\left\{H'+H'\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H'+\cdots\right\}|A\rangle$$
$$=\left\{U+H^{(1)}+U\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}U+U\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H^{(1)}\right.$$
$$\left.+H^{(1)}\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}U+\cdots\right\}|A\rangle \tag{7.61}$$

となり，右辺の第2項

$$H_B=U\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H^{(1)}+H^{(1)}\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}U \tag{7.62}$$

が制動輻射に効く．というのは，この項は電子を散乱するポテンシャル U が1個と，光子を生成する $H^{(1)}$ が1個入っているからである．この場合，入射電子の運動量を $\boldsymbol{p}_0$ とすると，初期状態は，

$$|I\rangle\equiv|\boldsymbol{p}_0\rangle \tag{7.63}$$

で，終状態は，運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子が1個，波数 $\boldsymbol{k}$，偏り r の光子がある状態で，

$$|F\rangle\equiv a_{\boldsymbol{k}}^{(r)\dagger}|\boldsymbol{p}\rangle \tag{7.64}$$

である．これらで（7.61）をはさむと，右辺第1行目はゼロになる．

(7.62)をみてすぐわかることは，右辺の第1項は，電子がまず光子を発射して，それからポテンシャルによって散乱され，第2項は，まず電子が散乱されてのち，1個の光子が生成されるということである．初期状態と終状態で H_{B} をはさむと，

$$\langle F|H_{\mathrm{B}}|I\rangle=\langle\boldsymbol{p}|a_{\boldsymbol{k}}^{(r)}\left\{U\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H^{(1)}+H^{(1)}\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}U\right\}|\boldsymbol{p}_0\rangle \tag{7.65 a}$$

光子の消滅演算子は，ポテンシャル U と交換するから，

$$(7.65\,\mathrm{a})=\sum_{\boldsymbol{q}}\langle\boldsymbol{p}|U|\boldsymbol{q}\rangle\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}|\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}|\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}\rangle\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}|H^{(1)}|\boldsymbol{p}_0\rangle$$
$$+\sum_{\boldsymbol{q}}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}|H^{(1)}|\boldsymbol{q}\rangle\langle\boldsymbol{q}|\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}|\boldsymbol{q}\rangle\langle\boldsymbol{q}|U|\boldsymbol{p}_0\rangle \tag{7.65 b}$$

さらに，

$$=\sum_{\boldsymbol{q}}\langle\boldsymbol{p}|U|\boldsymbol{q}\rangle\frac{1}{E-\dfrac{1}{2m}\boldsymbol{q}^2-\hbar\omega_k+i\varepsilon}\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}|H^{(1)}|\boldsymbol{p}_0\rangle$$

$$+\sum_{\boldsymbol{q}}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}|H^{(1)}|\boldsymbol{q}\rangle \frac{1}{E-\dfrac{1}{2m}\boldsymbol{q}^2+i\varepsilon}\langle \boldsymbol{q}|U|\boldsymbol{p}_0\rangle \tag{7.65 c}$$

となるが，この式に出ている量はすべて計算ずみである．(7.51 a)，(7.51 b)，それから付録の(A.14.12)がそのまま使える．すると，計算は $\boldsymbol{q}$ に関する和だけで，

$$\langle F|H_{\mathrm{B}}|I\rangle = \frac{e}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k V}}\, e^{(r)}(\boldsymbol{k})\,\widehat{U}(|\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}|/\hbar)$$
$$\times\left\{\frac{\boldsymbol{p}_0}{E-\dfrac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_0-\hbar\boldsymbol{k})^2-\hbar\omega_k+i\varepsilon}+\frac{\boldsymbol{p}}{E-\dfrac{1}{2m}(\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k})^2+i\varepsilon}\right\} \tag{7.66}$$

となる．第2行目の第1項は図7.7に対応し，第2項は図7.8に対応している．ポテンシャルが運動量を $(\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k})$ だけ吸ってくれたため1個の光子の発射が可能になったことは，$\widehat{U}(|\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}|/\hbar)$ に表れている．

(7.66) の分母を整理すると，それぞれ，

$$E-\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_0-\hbar\boldsymbol{k})^2-\hbar\omega_k=-\hbar\omega_k\left\{1+\frac{\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{k}}{kc}-\frac{\hbar k}{2mc}\right\} \tag{7.67 a}$$

$$E-\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k})^2=\hbar\omega_k\left\{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{kc}-\frac{\hbar k}{2mc}\right\} \tag{7.67 b}$$

となる．ただし，

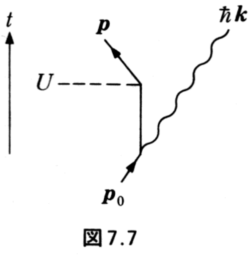


図7.7

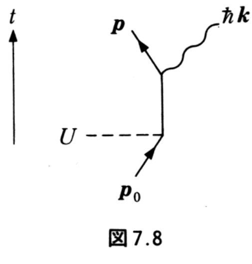


図7.8

$$\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{p}/m \tag{7.68 a}$$

$$\boldsymbol{v}_0 \equiv \boldsymbol{p}_0/m \tag{7.68 b}$$

とおいた．

ここで，ちょっとあらっぽい近似をやらせてもらう．これは非相対論的な計算だから，粒子の速度は光の速度より小さく，しかも，光子の運動量も，$|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}|$ に比べて小さいとし，(7.67) をそれぞれ $-\hbar\omega_k$ と $\hbar\omega_k$ にしてしまう．そして，Coulomb ポテンシャルのほうの $\hbar\boldsymbol{k}$ も無視すると，結果は，

$$\langle F|\boldsymbol{H}_{\mathrm{B}}|I\rangle = \left(\frac{Ze^2\hbar^2}{\varepsilon_0 m^2|\Delta\boldsymbol{v}|^2 V}\right)^2 \left(\frac{e^2}{2\hbar\omega_k{}^3 V}\right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\Delta\boldsymbol{v} \tag{7.69}$$

いうまでもなく，$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$ である．

この式から，断面積を求める計算は自らやってみられたい．結果は，

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\mathrm{e}}\, d\Omega_k\, d\omega} = \frac{\pi Z^2 e^4/(4\pi\varepsilon_0)^2}{m^2 v^4 \sin^4\dfrac{\theta}{2}} \times \frac{e^2|\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\Delta\boldsymbol{v}|^2}{16\pi^3 c^3 \hbar\omega} \tag{7.70}$$

となるはずである．右辺のはじめの項は，Rutherford の散乱断面積であり，第2番目の項が，角振動数 ω，偏り $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ の光子の発生する断面積である．角振動数 ω がゼロに近づくと発散するのが特徴的である．この発散は，光子1個の発射を扱ったからで，小さい角振動数を取り扱うときには，いままでやったような，摂動論的な取り扱いが不適当であることがわかっている．これは，赤外発散の問題として，くりこみ理論が出るときに重要な役割をはたした．

§5　スペクトル線の幅とずれ

いままでの輻射の計算では，一応相互作用が小さいとして，摂動論を用い，最低近似だけを問題にしてきた．この近似では，物理系が初期状態にある確率を常に1とおいてきたことに気がつかれたであろうか？　しかし，実際には遷移が起こるかぎり，系が初期状態に乱される確率はだんだんと減っていくはずである．したがって，摂動論で，永い時間を問題にするには無理がある．それでいて，エネルギーの保存則などを問題にするときは，時間を無限大まで延ばさなければならない．そこで，この点を改良しようというのが，以下に説明す

る Wigner-Weisskopf の理論である．Wigner-Weisskopf の理論をさらに改良し発展させたのが Heitler の減衰理論（damping theory）であって，くりこみ理論の発見に重大な役割をはたした．

ここでは，むずかしい Heitler の理論ではなく，より初等的な Wigner-Weisskopf の理論を簡単に眺めてみよう．それによると，原子のエネルギー準位が有限の幅をもつだけでなく，スペクトルの中心がずれてくることがわかる．

出発点を，相互作用描像における変換関数 $U(t, t_0)$ の微分方程式 (6.18) にとろう．自由な部分の Hamiltonian を H_0 とする．これには，原子をつくるポテンシャルも含めておいてもよい．その固有関数を簡単に $|A\rangle$ と書く．すなわち，

$$H_0|A\rangle = E_A|A\rangle \tag{7.71}$$

とする．これらの固有関数は，完全性の条件

$$\sum_A |A\rangle\langle A| = I \tag{7.72}$$

を満たすことを仮定する．

変換関数 $U(t, t_0)$ の方程式 (6.18) を，H_0 の固有関数 $|A\rangle$ と $|B\rangle$ ではさむと，

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}\langle B|U(t, t_0)|A\rangle \\ &=\sum_C \langle B|H'|C\rangle \exp[i(E_B-E_C)t/\hbar]\langle C|U(t, t_0)|A\rangle \end{aligned} \tag{7.73}$$

が得られる．ただし，$H'(t)$ に関する (6.39) と固有値方程式 (7.71) を用いただけで，これは正確な式である．

この式を，$A=B$ のときと $A\neq B$ のときの 2 つに分けて書くと，

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}\langle A|U(t, t_0)|A\rangle \\ &=\sum_B \langle A|H'|B\rangle \exp[i(E_A-E_B)t/\hbar]\langle B|U(t, t_0)|A\rangle \end{aligned} \tag{7.74 a}$$

および

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}\langle B|U(t, t_0)|A\rangle \\ &=\langle B|H'|A\rangle \exp[i(E_B-E_A)t/\hbar]\langle A|U(t, t_0)|A\rangle \\ &\quad+\sum_{C\neq A} \langle B|H'|C\rangle \exp[i(E_B-E_C)t/\hbar]\langle C|U(t, t_0)|A\rangle \end{aligned} \tag{7.74 b}$$

となるが，まだ近似は入っていない．

そこで，(7.74 b) の右辺の2行目は小さいとして省略してしまうと (つまり，$\langle A|U(t,t_0)|A\rangle$ を決めるためには，A とその他の状態 B との相互作用が主に効き，A 以外の状態どうしの相互作用は無視できるとする)，(7.74 a) は変わらず，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle A|U(t,t_0)|A\rangle$$
$$=\sum_B\langle A|H'|B\rangle\exp[i(E_A-E_B)t/\hbar]\langle B|U(t,t_0)|A\rangle \tag{7.75 a}$$

で，(7.74 b) のほうは，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle B|U(t,t_0)|A\rangle$$
$$=\langle B|H'|A\rangle\exp[i(E_B-E_A)t/\hbar]\langle A|U(t,t_0)|A\rangle \tag{7.75 b}$$

となる．これらを仮に **Wigner-Weisskopf の方程式**とよんでおく．実際の計算には，$t_0=0$，かつ，$t\to\infty$ としておくと便利である．(7.74 b) を (7.75 b) でおきかえたことは，具体的なモデルでやってみて，あとで正当化するしか手がない．

これらの式を解くために，アンザッツ (これには適当な日本語訳も英語訳もない．“案設”と訳すのはどうだろうか？)

$$\langle A|U(t,0)|A\rangle=\exp(-\nu_A t/2) \tag{7.76}$$

をおく．これはもちろん，時間の大きいところで妥当なものであることをあとで正当化しなければならない．またこの ν_A を決めなければならない．

そのために，(7.76) を (7.75 b) に入れて積分すると，

$$\langle B|U(t,0)|A\rangle=-\frac{1}{\hbar}\int_0^t dt_1\exp[i(E_B-E_A)t/\hbar]\exp(-\nu_A t/2)\langle B|H'|A\rangle$$
$$=\frac{\exp[i(E_B-E_A)t/\hbar]-1}{E_A-E_B-i\dfrac{\hbar}{2}\nu_A}\langle B|H'|A\rangle \tag{7.77}$$

が得られる．これを (7.75 a) のほうに代入すると，

$$\frac{i\hbar}{2}\nu_A=\sum_B|\langle A|H'|B\rangle|^2\frac{1-\exp[-i(E_B-E_A)t/\hbar]\exp(\nu_A t/2)}{(E_B-E_A)/\hbar+i\dfrac{1}{2}\nu_A} \tag{7.78}$$

となる (この式の左右両辺の次元が等しいことを確認しておくように)．

さて，右辺の指数の入った項を処理するには，少々不愉快なことをしなければ

ばならない．ここのところに限り，ν_A は小さいとしてゼロとおいてしまう．すなわち，

$$\frac{1-\exp[-i(E_B-E_A)t/\hbar]\exp(\nu_A t/2)}{(E_B-E_A)/\hbar+i\frac{1}{2}\nu_A}\approx\frac{1-\exp[-i(E_B-E_A)t/\hbar]}{(E_B-E_A)/\hbar}$$

$$=\frac{1-\cos(E_B-E_A)t/\hbar}{(E_B-E_A)/\hbar}+i\frac{\sin(E_B-E_A)t/\hbar}{(E_B-E_A)/\hbar} \tag{7.79 a}$$

永い時間を考えると，付録の（A.10.5）により，

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1-\cos(E_B-E_A)t/\hbar}{(E_B-E_A)/\hbar}+i\frac{\sin(E_B-E_A)t/\hbar}{(E_B-E_A)/\hbar}\right\}$$

$$=P\frac{\hbar}{E_B-E_A}+i\pi\hbar\delta(E_B-E_A) \tag{7.79 b}$$

すると，(7.78) は，$t\to\infty$ で，

$$i\frac{\hbar}{2}\nu_A=\sum_B|\langle A|H'|B\rangle|^2\left\{P\frac{1}{E_B-E_A}+i\pi\delta(E_B-E_A)\right\} \tag{7.80}$$

（もし，ν_A をゼロとおく前に $t\to\infty$ としたら？）

したがって，ν_A には実部と虚部があり，それぞれ

$$\mathrm{Re}\,\nu_A=\frac{2\pi}{\hbar}\sum_B\delta(E_B-E_A)|\langle A|H'|B\rangle|^2 \tag{7.81 a}$$

$$\mathrm{Im}\,\nu_A=\frac{2}{\hbar}\sum_B P\frac{1}{E_A-E_B}|\langle A|H'|B\rangle|^2\equiv\frac{2}{\hbar}\varDelta E_A \tag{7.81 b}$$

である．実部はちょうど，状態 A から B への遷移確率を B で足し合わせたものになっている．遷移が起こるだけ，状態 A の確率は減っているわけである．Fermi のゴールデンルールの式（6.47′）と比較してみよ．

一方，虚部は，状態 A の振動数を $\varDelta E_A$ だけ変化させている．つまりスペクトルがずれることを表している．この“ずれ”は，たとえば，自由な電子が光子を 1 個発射して，それをまた吸収する過程を計算してみると，電子の質量が変化するように働く．残念ながら，この過程をまじめに計算すると，中間状態の光子の運動量に関する積分が発散する．にもかかわらず，とにかく電子の質量は，電磁場との相互作用によって変化する．この変化した質量が実は，実際に観測される電子の質量であるとするのが，くりこみ理論のアイディアである．

発散する積分まで含めて，観測質量でおきかえるというのは，正直にいって不愉快である．質量の発散の問題は，しかし，古典電磁気学から引き継がれたもので，そのことは第4章でも簡単にふれた．QEDが提唱された直後，1930年頃にまた同じ問題が指摘された．そして，いまだに解決していない難問中の難問である．誰かがそのうち解決しなければならない最も基本的な問題なのであろう．

演 習 問 題 VII

1. 荷電粒子と電磁場の相互作用は，非相対論的理論では，(6.15)にみられるように，e に比例する $H^{(1)}$ と，e^2 に比例する $H^{(2)}$ とからなっている．Lippmann-Schwinger の方程式を逐次に用い，

$$H'\boldsymbol{\Psi}_a^{(+)}$$

を e のべきに展開し，e^2 に比例する項を取り出してみよ．

2. (7.4) を導け．

3. (7.8) を，全立体角にわたって積分し，(7.11) を確かめよ．

4. (7.11) と (4.89) を比べてみよ．

5. Heisenberg の運動方程式を用い，(7.11) を (7.11′) に変形してみよ．

6. 運動量 $\boldsymbol{p}_0$ をもった自由な電子が，1個の光子を放出して，運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由電子に変わることができるであろうか？　エネルギーと運動量の保存則だけを用いて調べてみよ．

7. 水素原子内の電子が，$\psi_{2,1,0}$ から $\psi_{1,0,0}$ 状態におちて1個の光子を放出する(単位時間の) 確率を求めよ．

8. 水素原子中の電子が1個の光子を出して状態 $\psi_{2,0,0}$ から $\psi_{1,0,0}$ へおちることは可能であろうか？

9. 自然放射の電気双極子近似の式(7.11′)において，ξ_{ba} をだいたい原子の大きさ a の程度とすると，

$$\bar{w}_{a\to b}\approx\alpha\omega_{ba}$$

くらいの大きさになることを示せ．

10. 光電効果の式 (7.32) を (7.31) から導いてみよ．

11. 光子が電子によって散乱される場合，散乱波の波長は (7.38) によってずれる．このずれが小さいとして，

$$\lambda-\lambda_0=\frac{\hbar}{mc}(1-\cos\theta)$$

を導け．

12. 光子散乱の式 (7.54) に (7.55) を用い，かつ散乱波の波長のずれを無視

して Thomson の式（7.56）を確かめよ.

13. 光子散乱の式（7.54）を，前問の仮定を用いないで積分してみよ.

14. 制動輻射の式（7.69）から，断面積（7.70）を求めよ.

15. スペクトルのずれの式(7.81)を用い，相互作用 $H^{(1)}$ による，自由電子のエネルギーのずれを計算してみよ.

付録　数　学　公　式

1.　三　　角　　法

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B \tag{A.1.1}$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B \tag{A.1.2}$$

$$\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B) \tag{A.1.3}$$

$$\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B) \tag{A.1.4}$$

$$\sin(\pi+A)=-\sin A \tag{A.1.5}$$

$$\cos(\pi+A)=-\cos A \tag{A.1.6}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi+A\right)=\cos A \tag{A.1.7}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi+A\right)=-\sin A \tag{A.1.8}$$

2.　線および面（『物理数学ノート　I』71頁参照）

微小線分の接線要素を $d\boldsymbol{x}$ で表す（図 A.2.1）.



図 A.2.1

面積要素の法線成分 $d\boldsymbol{S}$ は，面が

$$f(\boldsymbol{x})=C \tag{A.2.1}$$

で与えられたとき，面の正のほうを向いて，

$$d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})\delta(f(\boldsymbol{x})-C)d^3\boldsymbol{x} \tag{A.2.2}$$

である．正の方向とは，パラメーター C の増加する方向のことである．

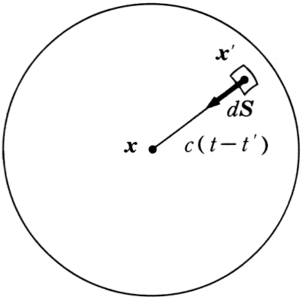


図 A.2.2

あとに出てくる遅延 Green 関数（A.9.1）には，

$$-\frac{1}{c}\nabla|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right)d^3\boldsymbol{x}'$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right)d^3\boldsymbol{x}' \qquad \text{(A.2.3)}$$

のような関数が含まれているが，これは $\boldsymbol{x}$ を中心とした，半径 $c(t-t')$ をもった球上の点 $\boldsymbol{x}'$ における面要素である（図 A.2.2）．面要素の方向は $\boldsymbol{x}'$ から $\boldsymbol{x}$ に向いている．

なお，デルタ関数については，

$$\delta(f(t'))dt'=\frac{1}{|f'(t_1)|}\delta(t'-t_1)dt' \qquad \text{(A.2.4)}$$

が成り立つことに注意．ただし t_1 は，

$$f(t_1)=0 \qquad \text{(A.2.5)}$$

で定義される値である．したがって，たとえば $|\dot{\boldsymbol{\xi}}|<c$ のとき，

$$\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t')|\right)dt'$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1))\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1)}\delta(t'-t_1)dt' \qquad \text{(A.2.6)}$$

ただし，t_1 は，

$$t-t_1-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)|=0 \qquad \text{(A.2.7)}$$

を満たすので，$\boldsymbol{x}$ と t の関数となる．

3. Nabla オペレーター

Nabla オペレーター

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{A.3.1}$$

は，ベクトルのように取り扱う．すると，たとえば，

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))=\nabla(\nabla\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))-\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{A.3.2}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))=0 \tag{A.3.3}$$

$$\nabla\cdot(\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))=\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{A.3.4}$$

$$\nabla\times(\nabla\phi(\boldsymbol{x}))=0 \tag{A.3.5}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) \tag{A.3.6}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))\\&\quad+(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{A.3.7}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\times(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\times(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))\\&\quad+(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{A.3.8}$$

連続でない関数に作用させるときには，Nabla を，

$$\nabla(\cdots)=\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})(\cdots) \tag{A.3.9}$$

で定義する．∂V というのは，微小体積 V を包む表面のことである．

4. 積 分 定 理

おなじみの，体積積分を表面積分になおす Gauss の定理や，表面積分を線積分になおす Stokes の定理は，よく知られた初等積分の定理

$$\int_a^b dx\frac{d}{dx}f(x)=f(a)-f(b) \tag{A.4.1}$$

を，それぞれ三次元と二次元に拡張したものであると思えばよい．それらをここでは簡単に，

$$\int_V d^3x\nabla(\cdots)=\int_{\partial V}d\boldsymbol{S}(x)(\cdots) \tag{A.4.2}$$

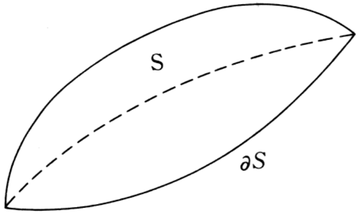


図 A.4.1

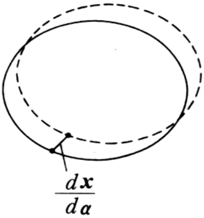


図 A.4.2

$$\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\times\nabla(\cdots)=\int_{\partial S}d\boldsymbol{x}(\cdots) \qquad \text{(A.4.3)}$$

と書いておく．ただし，∂V とは，体積 V を包む閉じた表面であり，∂S とは，曲面 S を包む閉じた線を意味する（図 A.4.1）．

上の関係は，もちろんいつでも正しいが，あとで応用するときのために，積分領域 V や S や被積分関数 $(\cdots)$ があるパラメーター α（たとえば，時間）による場合のことを少し注意しておくと：

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{V(\alpha)}d^3x(\cdots,\alpha)$$
$$=\oint_{\partial V(\alpha)}d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\alpha}(\cdots,\alpha)+\int_{V(\alpha)}d^3x\frac{\partial}{\partial\alpha}(\cdots,\alpha) \qquad \text{(A.4.4)}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{S(\alpha)}d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})(\cdots,\alpha)$$
$$=-\oint_{\partial S(\alpha)}d\boldsymbol{x}\times\frac{d\boldsymbol{x}}{d\alpha}(\cdots,\alpha)+\int_{S(\alpha)}d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\alpha}(\cdots,\alpha) \qquad \text{(A.4.5)}$$

(A.4.4) の右辺第 1 項は，$V(\alpha)$ の表面が α の変化に従って変化する効果を表し，(A.4.5) の右辺第 2 項は，同じく α の変化に基づく，面 S の縁の変化を表す．

5. 立 体 角

まず二次元から話を始める．二次元の空間における位置を簡単に，太字 $\boldsymbol{x}$ で表す．すると，原点から点 $\boldsymbol{x}$ へ向かう単位ベクトルは $\boldsymbol{x}/r$ である（ただし，r は，

原点から点 $\boldsymbol{x}$ までの距離)．

点 $\boldsymbol{x}$ における勝手な無限小線分を考える．その線分が原点に対して張る角はやはり無限小で，それを $d\theta$ と書くと，

$$d\theta=\frac{1}{r}\frac{\boldsymbol{x}}{r}d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{x}) \tag{A.5.1}$$

ただし，$d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{x})$ とは点 $\boldsymbol{x}$ における無限小線要素に，その法線方向の単位ベクトルをかけたものである（法線は原点の反対に向いたほうを正にとる，図 A.5.1)．

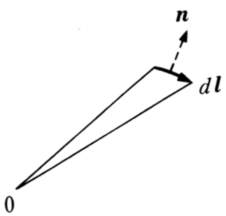


図 A.5.1

三次元では，点 $\boldsymbol{x}$ における面積要素 $d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ を考え，原点に対して $d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ が張る量

$$d\Omega=\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{x}}{r}d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \tag{A.5.2}$$

を，(無限小)立体角という．原点を囲む閉曲面が，原点に対して張る立体角は 4π である．

点 $\boldsymbol{x}$ における面要素 $d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ が，点 $\boldsymbol{x}'$ に対して張る立体角 $d\Omega(\boldsymbol{x}')$ は，

$$d\Omega(\boldsymbol{x}')=-\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \tag{A.5.3}$$

となる．右辺を，$\boldsymbol{x}'$ を含まない閉じた任意の曲面にわたって積分すると，左辺はゼロ，$\boldsymbol{x}'$ を含む閉じた曲面にわたって積分すると，4π になる．

6．ベクトル場の決定

空間の点 $\boldsymbol{x}$ に依存したベクトル場を $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ としよう．この場は，十分遠方でゼロになると仮定する．いま，この場を 2 つに分けて，

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \tag{A.6.1}$$

と書く．ただし，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\equiv 0 \tag{A.6.2 a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})\equiv 0 \tag{A.6.2 b}$$

である．$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ のほうを横成分（transverse component），$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})$のほうを縦成分（longitudinal component）とよぶことにする．横とか縦とかという意味は，場を Fourier 変換してみたらわかるが，Nabla の意味から次のような性質であることが予想されるだろう．

Nabla ∇ は，(A.3.1) に書いたように，方向をもった微分だからベクトルとして取り扱うことができる．そしてその方向は，∇ が作用する関数の変化が最も大きい方向である．したがって，(A.6.2 a) を満たす横成分のほうは，ベクトル場自身が，最も激しく変化する方向と直交していることを示している．一方，(A.6.2 b) を満たす縦成分のほうは，場が，その最も激しく変化する方向と平行なことを示している．これが，横とか縦とかよぶ理由である．

さて，横と縦の成分がそれぞれ，

$$\nabla\times\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) \tag{A.6.3 a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}) \tag{A.6.3 b}$$

で与えられているとしよう．両式の右辺はそれぞれ与えられたベクトル場とスカラー場で，両方とも無限の遠方でゼロになるとする．このとき，もとの場 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x})$ で表現するにはどうしたらよいか，という問題を考えてみよう．いいかえれば，場 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ は，(A.6.3) が与えられたとき，一義的に決まるだろうかという問題である．

すぐ気がつくことは，(A.6.3) は 4 個の式から成り立っているということである．3 個の成分をもった場 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ を決めるのに，(A.6.3)のように，4 個の条件がなぜいるのだろうか？

答えは簡単で，方程式 (A.6.3 a) は 3 個からなっているが，実は 3 個が全部独立ではなく，そのうち 2 個だけが独立なのである．それをみるためには，(A.6.3 a) の左から ∇ をかけてみればよい．すると，(A.3.3) により，左辺は恒等的にゼロになる．したがって，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})\equiv 0 \tag{A.6.4}$$

が恒等的に満たされていなければならない．さもないと，(A.6.3 a) はコンシステントでなくなる．つまり，$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})$ は，横成分だけからできたベクトル場として与えられていなければならない．すなわち，

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \tag{A.6.4$'$}$$

である．

方程式 (A.6.3) を積分するには，

$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{A.6.5}$$

を利用する．

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}') \tag{A.6.6 a}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}') \tag{A.6.6 b}$$

が，それぞれ (A.6.3 a) と (A.6.3 b) を満たすことを試すのは容易であろう．次に，方程式 (A.6.3) の各々が，ただ 1 つの解をもつことをいえばよいが，それも容易だから演習問題にしておく．(A.6.6) の両辺を加え合わせれば，はじめの (A.6.1) の $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ が得られる．

7. バランス方程式

今度は，空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時間 t に依存している場 $\Gamma(x)$, $q(x)$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{\Sigma}(x)$ を考える．ここで単に x と書いたのは，空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時間 t とをひとまとめにしたものである．もし上の 3 個の場の間に，

$$\partial_t\Gamma(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}(x)=\partial_t\Gamma(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(x)=q(x) \tag{A.7.1}$$

なる関係が成立するとき，これを**バランス方程式**という．$\boldsymbol{\Sigma}(x)$ の横成分は効かない．

とくに，

$$q(x)\equiv 0 \tag{A.7.2}$$

ならば，バランス方程式は，

$$\partial_t\Gamma(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(x)=0 \tag{A.7.3}$$

という連続の方程式になる．横成分は相変わらず効かない．

バランス方程式の意味をみるために，(A.7.1) の両辺を，ある静止した有限体積 V にわたって積分し，Gauss の積分定理 (A.4.2) を使って発散の項を表面積分になおすと，

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\Gamma(x)+\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(x)=\int_V d^3x\,q(x) \tag{A.7.4}$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\Gamma(x)=-\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}}(x)+\int_V d^3x\,q(x) \tag{A.7.4$'$}$$

が得られる．

左辺は，体積 V に含まれる物理量 Γ の時間的変化，右辺第 1 項は，体積 V の表面要素 $d\boldsymbol{S}$ を通して入ってくる Γ の流れ(負号に注意)，第 2 項は体積 V の中から湧き出し（消えていくのかもしれない）の源の総和である．

バランス方程式の例は，本文にたくさん出ているが，その場合いちいち積分形になおさないで取り扱うことが多い．重要なことは，表面からの流れを表す，(A.7.4′)の右辺の第 1 項には縦成分しか効かないということである．横成分のほうは，Γ の増減にまったく関係ない．これは体積 V の大きさやその表面の形によらず成り立つことである．

もし，Γ と $\boldsymbol{\Sigma}$ がバランス方程式を満たすならば，

$$\Gamma'(x)\equiv\Gamma(x)-\nabla\cdot\boldsymbol{p}(x) \tag{A.7.5 a}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}'(x)\equiv\boldsymbol{\Sigma}(x)+\frac{\partial\boldsymbol{p}(x)}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{M}(x) \tag{A.7.5 b}$$

で定義される量も，同じバランス方程式を満たす．いいかえるならば，(A.7.5) の付加項は，連続の方程式を恒等的に満たす．これは明らかであろう．しかもこのとき，

$$\int_V d^3x\,\Gamma'(x)=\int_V d^3x\,\Gamma(x)-\oint_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}(x) \tag{A.7.6}$$

が成り立つから，$\boldsymbol{p}(x)$ が十分遠方で消えるようなものならば，右辺第 2 項は無視することができる．

8. 三次元の Green 関数

三次元空間によく出てくる Green 関数を説明なしに並べておく.

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{A.8.1}$$

$$[\nabla^2 - \varkappa^2]\frac{\exp(-\varkappa|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (\varkappa \geq 0) \tag{A.8.2}$$

$$[\nabla^2 + \omega^2]\frac{\exp(\pm i\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (\omega \geq 0) \tag{A.8.3}$$

$$[\nabla^2 + \omega^2]\frac{\cos\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{A.8.4}$$

$$[\nabla^2 + \omega^2]\frac{\sin\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = 0 \tag{A.8.5}$$

ついでに，それぞれの Fourier 変換もあげておく.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] \tag{A.8.6}$$

$$\frac{\exp(-\varkappa|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\varkappa^2}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] \tag{A.8.7}$$

$$\frac{\exp(\pm i\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2-\omega^2 \mp i\varepsilon}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] \qquad (\omega > 0) \tag{A.8.8}$$

最後の式で，ε は正の定数で，積分を遂行したあとでゼロとおく. なお，次の公式は球対称の関数を積分するとき有効である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{f(r')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = 4\pi\left\{\frac{1}{r}\int_0^r dr' r'^2 f(r') + \int_r^{\infty} dr' r' f(r')\right\} \tag{A.8.9}$$

9. 四次元の Green 関数と波動方程式

四次元空間の波動方程式を積分する問題では次のような Green 関数が活躍する.

$$D^{(\mathrm{ret})}(x-x') \equiv -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\delta(ct-ct'-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2-(k_0+i\varepsilon)^2}\exp[ik(x-x')] \tag{A.9.1}$$

$$D^{(\mathrm{adv})}(x-x') \equiv -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\delta(ct-ct'+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2-(k_0-i\varepsilon)^2}\exp[ik(x-x')] \tag{A.9.2}$$

ただし，

$$k(x-x') \equiv \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-k_0(x_0-x_0') \equiv \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-ck_0(t-t') \tag{A.9.3}$$

である．

$D^{(\mathrm{ret})}$ のほうは，

$$t-t' = \frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \geq 0 \tag{A.9.4}$$

以外ではゼロ，また $D^{(\mathrm{adv})}$ のほうは逆に，

$$t-t' = -\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq 0 \tag{A.9.5}$$

以外ではゼロである．両方とも微分方程式

$$\Box D^{(\quad)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \equiv \left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]D^{(\quad)}(x-x')$$
$$= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(ct-ct') \equiv \delta^{(4)}(x-x') \tag{A.9.6}$$

を満たす．

(A.9.6) の空間変数について Fourier 変換してしまって，時間変数だけについての微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\omega_k{}^2\right]G^{(\mathrm{ret})}(t-t') = \delta(t-t') \tag{A.9.7}$$

および

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\omega_k{}^2\right]G^{(\mathrm{adv})}(t-t') = \delta(t-t') \tag{A.9.8}$$

を取り扱うほうが便利なこともある．この場合には，それぞれ

$$G^{(\mathrm{ret})}(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega_\kappa{}^2-(\omega+i\varepsilon)^2}\exp[-i\omega(t-t')] \tag{A.9.9}$$

および

$$G^{(\mathrm{adv})}(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{{\omega_\kappa}^2-(\omega-i\varepsilon)^2}\exp[-i\omega(t-t')] \tag{A.9.10}$$

が解になる．ただし，積分の中の ε は無限小の正の数で，積分を実行したあとでゼロとおく．

波動方程式

$$\Box D(x-x')\equiv\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)D(x-x')=0 \tag{A.9.11}$$

の解は，(A.9.1)，(A.9.2) から作ることができる．すなわち，

$$\begin{aligned}D(x-x')&=D^{(\mathrm{ret})}(x-x')-D^{(\mathrm{adv})}(x-x')\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\{\delta(ct-ct'-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)-\delta(ct-ct'+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)\}\end{aligned} \tag{A.9.12}$$

で，その Fourier 表示は $\omega_k=c|\boldsymbol{k}|$ として，

$$D(x-x')=-\frac{c}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\frac{\sin\omega_k(t-t')}{\omega_k} \tag{A.9.13 a}$$

$$=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\int_{-\infty}^{\infty}dk\sin k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\sin\omega_k(t-t') \tag{A.9.13 b}$$

である．この関数は定義式 (A.9.12) をみればわかるように，

$$(ct-ct')^2\neq(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2 \tag{A.9.14}$$

の領域，つまり空間的な領域でも時間的な領域でもゼロになっている．

なお，

$$D(x-x')|_{t=t'}=0 \tag{A.9.15 a}$$

$$\dot{D}(x-x')|_{t=t'}=-c\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{A.9.15 b}$$

などの性質も Fourier 表示から証明できるから，

$$D^{(\mathrm{ret})}(x-x')\equiv D(x-x')\theta(t-t') \tag{A.9.16}$$

なる関係も成り立つことがわかる．

10. ある極限

まず，ステップ関数

$$\theta(t) \equiv \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \dfrac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{A.10.1}$$

を導入する．すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} = -2\pi i \exp(-i\omega_0 t)\theta(t) \tag{A.10.2 a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \omega_0 + i\varepsilon} = -2\pi i \exp(i\omega_0 t)\theta(t) \tag{A.10.2 b}$$

が成り立つ．ただし，上の表現では，ε を正の数として，左辺をまず積分したあとで，ε をゼロにもっていく極限をとると了解する．

同じ注意のもとに，

$$-i\int_{t}^{\infty} dt' \exp(i\omega t')\exp(-\varepsilon|t'|) = \frac{1}{\omega + i\varepsilon} e^{i\omega t} = \begin{cases} 0 & (t \to \infty) \\ -2\pi i\,\delta(\omega) & (t \to -\infty) \end{cases} \tag{A.10.3 a}$$

同様に，

$$\frac{1}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega t} = \begin{cases} -2\pi i\,\delta(\omega) & (t \to \infty) \\ 0 & (t \to -\infty) \end{cases} \tag{A.10.3 b}$$

$$\frac{1}{\omega - i\varepsilon} e^{i\omega t} = \begin{cases} 2\pi i\,\delta(\omega) & (t \to \infty) \\ 0 & (t \to -\infty) \end{cases} \tag{A.10.3 c}$$

$$\frac{1}{\omega - i\varepsilon} e^{-i\omega t} = \begin{cases} 0 & (t \to \infty) \\ 2\pi i\,\delta(\omega) & (t \to -\infty) \end{cases} \tag{A.10.3 d}$$

これらの式を導くとき，Dirac のデルタ関数の表示

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} e^{-\varepsilon|t|} = 2\pi\,\delta(\omega) \tag{A.10.4}$$

を使った．なお，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} i\int_{0}^{\infty} dt\, e^{-iEt} e^{-\varepsilon t} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{E - i\varepsilon} = P\frac{1}{E} + i\pi\,\delta(E) \tag{A.10.5}$$

という表現が成り立つ．第 7 章の最後では，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}=\pi\,\delta(x) \tag{A.10.6 a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\cos(x/\varepsilon)}{x}=P\frac{1}{x} \tag{A.10.6 b}$$

を使う．

11. 級 数 展 開

$$|\boldsymbol{x}|\equiv r>|\boldsymbol{x}'|\equiv r' \tag{A.11.1}$$

とおくと，

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=r\left[1-\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+\frac{1}{2r^2}\left\{r'^2-\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2\right\}+\cdots\right] \tag{A.11.2}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{r}\left[1+\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{\ell=0}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell}P_\ell(\cos\theta) \tag{A.11.3}$$

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\boldsymbol{x}}{r}-\frac{\boldsymbol{x}'}{r}+3\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+\cdots\right] \tag{A.11.4}$$

θ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の間の角である．$P_\ell(x)$ というのは Legendre の多項式で，たとえば，

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad \cdots \tag{A.11.5}$$

なお，展開式

$$f\left(t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right)=f\left(t-\frac{1}{c}r\right)-\frac{1}{c}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|-r)\partial_t f\left(t-\frac{1}{c}r\right)+\cdots$$

$$=f\left(t-\frac{1}{c}r\right)+\frac{1}{c}r'\cos\theta\,\partial_t f\left(t-\frac{1}{c}r\right)+\cdots \tag{A.11.6}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}f\left(t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right)$$

$$=\left(\frac{1}{r}+\frac{r'}{r^2}\cos\theta\right)f\left(t-\frac{1}{c}r\right)+\frac{1}{c}\frac{r'}{r}\cos\theta\cdot\partial_t f\left(t-\frac{1}{c}r\right)+\cdots \tag{A.11.7}$$

なども

$$\nabla f\left(t-\frac{1}{c}r\right)=-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{x}}{r}\partial_t f\left(t-\frac{1}{c}r\right) \tag{A.11.8}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{g}\left(t-\frac{1}{c}r\right)=-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{x}}{r}\times\partial_t\boldsymbol{g}\left(t-\frac{1}{c}r\right) \tag{A.11.9}$$

といっしょによく使われる．

12. 平面波の位相速度

三次元空間において波の進む方向を明らかにするために，簡単な幾何の問題を考えてみよう．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ が，式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=b \tag{A.12.1}$$

を満たしているとしよう．$\boldsymbol{a}$ と b とは，それぞれ与えられたベクトルとスカラーである．これは，三次元空間の中の 1 つの平面を表す．これを，面 A とよんでおく．これはどんな平面だろうか？　どちらの方向を向き，原点からどれだけ離れているだろうか？

まず，原点から面 A に垂線をおろし，面 A と交わる点を $\boldsymbol{x}_0$ とする．$\boldsymbol{x}_0$ は原点から最も近い，面上の点で，いうまでもなく

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0=b \tag{A.12.2}$$

を満たす．点 $\boldsymbol{x}_0$ から $\delta\boldsymbol{x}$ だけ離れた平面上の勝手な点は，(A.12.1) により，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_0+\delta\boldsymbol{x})=b \tag{A.12.3}$$

だから，

$$\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{x}=0 \tag{A.12.4}$$

つまり，面上の勝手なベクトルは $\boldsymbol{a}$ と直交している．かくて，面 A は与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交している．面上のベクトル $\delta\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{x}_0$ とももちろん直交している．

$$\delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_0=0 \tag{A.12.5}$$

$\delta\boldsymbol{x}$ は面上にあるかぎり任意だから，$\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{a}$ とは平行か反平行である．したがって，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_0=0 \tag{A.12.6}$$

である．

$\boldsymbol{x}_0$ の長さ，つまり面 A の原点からの距離は，(A.12.2) と (A.12.6) を連立させて解くことにより，

$$|\boldsymbol{x}_0| = \frac{b}{|\boldsymbol{a}|} \tag{A.12.7}$$

となる．

つまり，面 A は，原点から (A.12.7) だけ離れたところにある，$\boldsymbol{a}$ と直交した平面である．

さて，いま b が時々刻々に変化している($\boldsymbol{a}$ は時間によらない)とすると，面 A はどれだけの速さでどのように動くだろうか？

b が b' に変わったときの平面を面 A′ とよぶことにすると，上の議論によって，面 A′ は面 A と平行である (A も A′ も $\boldsymbol{a}$ と直交した平面だから)．したがって，平面の速度を知るためには，原点から最も近い点の速度を知ればよい．それは (A.12.7) により，

$$v \equiv \frac{d|\boldsymbol{x}_0|}{dt} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\frac{d}{dt}b(t) \tag{A.12.8}$$

である．いいかえると，面 A は $\boldsymbol{a}$ の方向に速さ v で動いていく．

具体的な例として，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$，角振動数 ω (>0) をもつ平面波を考える．この平面波の位相は，

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t \tag{A.12.9}$$

で，この位相が一定な面が空間中をどのように動いていくかを調べてみよう．

位相 (A.12.9) が一定なのは，

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \omega t + \text{const.} \tag{A.12.10}$$

で決まる平面である(だから，これを平面波という)．したがって上の議論により，この平面は速度

$$v = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \tag{A.12.11}$$

で，$\boldsymbol{k}$ の方向に動いていく．(A.12.11) は位相が一定の面の速度だから，**位相速度**とよばれる．この式は，平面波の速度，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と角振動数 ω の間の基本的な関係である．

ここで，Nabla の意味を調べておこう．

いま，波の位相（A.12.9）の関数

$$\psi_k(\boldsymbol{x}, t)=Ae^{i\phi(\boldsymbol{x},t)}=Ae^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} \tag{A.12.12}$$

を考える．(A.12.12) に ∇ を作用させると，

$$\nabla\psi_k(\boldsymbol{x}, t)=i\boldsymbol{k}\psi_k(\boldsymbol{x}, t) \tag{A.12.13}$$

が得られる．これは，平面波に作用するとき，∇ が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向を向いていることを意味している．

もっと複雑な関数に対しては，Fourier 変換で平面波に展開して話をすると，各平面波に対して上のことが成り立つ．

波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は，波の波長 λ と

$$|\boldsymbol{k}|=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{A.12.14}$$

なる関係にある．また角振動数 ω は，波の振動数 ν と

$$\omega=2\pi\nu \tag{A.12.15}$$

で結ばれている．関係（A.12.14）は，平面波の波動関数（A.12.12）が 2π の周期をもっていること，およびすでに出てきた(A.12.7)によって 2π だけ位相の異なる，同一時刻における 2 つの平面の間の距離(つまり波長 λ)を計算することによって得られる．また，(A.12.15)のほうは，空間の 1 点に目をつけて，やはり，波動関数が 2π の周期をもつことを考慮して導くことができる．

13. 偏光

光が電磁波であるとすると，反射，屈折などの性質が，Maxwell の方程式の境界値問題としてうまく説明できることを本文で述べた．電磁波は横波であって，Faraday の法則によって電場と磁場とはお互いに直交し，かつ波の進む方向と直角に振動している．われわれの目に感じるのは電場のほうで，電場の振動する面を偏光面とよぶ．

いま，x 方向に振動しながら z 方向に進む波

$$E_x=a_x\cos(kz-\omega t+\delta_x) \tag{A.13.1}$$

と，y 方向に振動しながら z 方向に進む波

$$E_y = a_y \cos(kz - \omega t + \delta_y) \tag{A.13.2}$$

とが共存する場合を考える．そうすると，この合成波はどんな振動をするであろうか？　それをみるために，(A.13.1)，(A.13.2) から $kz-\omega t$ を消去する．これらの式によると，

$$kz - \omega t + \delta_x = \cos^{-1}\left(\frac{E_x}{a_x}\right) \tag{A.13.3}$$

$$kz - \omega t + \delta_y = \cos^{-1}\left(\frac{E_y}{a_y}\right) \tag{A.13.4}$$

だから，辺々差し引いて，両辺の cos をとると，

$$\begin{aligned}\cos(\delta_x - \delta_y) &= \cos\left\{\cos^{-1}\left(\frac{E_x}{a_x}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{E_y}{a_y}\right)\right\} \\ &= \cos\cos^{-1}\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\cos\cos^{-1}\left(\frac{E_y}{a_y}\right) \\ &\quad + \sin\cos^{-1}\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\sin\cos^{-1}\left(\frac{E_y}{a_y}\right) \\ &= \left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right) + \sqrt{1-\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2}\end{aligned} \tag{A.13.5}$$

が得られる．したがって，

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right)\cos(\delta_x - \delta_y) = \sin^2(\delta_x - \delta_y) \tag{A.13.6}$$

である．これが，位相の差によってベクトル $\boldsymbol{E}$ のとりうる値を示す．2,3 の特別な場合を考えてみると，

(i)　$\delta_x - \delta_y = 0$

$$\begin{aligned}&\therefore\quad \cos(\delta_x - \delta_y) = 1 \qquad \sin(\delta_x - \delta_y) = 0 \\ &\therefore\quad \frac{E_x}{a_x} = \frac{E_y}{a_y} \qquad \therefore\quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_x}{a_y}\end{aligned} \tag{A.13.7}$$

ベクトル $\boldsymbol{E}$ はいつでも，z 軸とベクトル $(a_x, a_y, 0)$ で張られる平面の上にある(直線または面偏光)．

(ii)　$\delta_x - \delta_y = \pi/2$

$$\begin{aligned}&\therefore\quad \cos(\delta_x - \delta_y) = 0 \qquad \sin(\delta_x - \delta_y) = 1 \\ &\therefore\quad \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = 1\end{aligned} \tag{A.13.8}$$

したがって，ベクトル $\boldsymbol{E}$ は，断面が楕円のらせんの上を動く（一般には楕円偏光．もし 2 つの波の振幅が同じなら，円偏光）．

（iii）　$\delta_x-\delta_y=\pi$

$$\therefore\quad \cos(\delta_x-\delta_y)=-1 \qquad \sin(\delta_x-\delta_y)=0$$

$$\therefore\quad \frac{E_x}{a_x}=-\frac{E_y}{a_y} \tag{A.13.9}$$

14．運動量の固有状態

量子力学では，粒子の運動量 P と X とは，交換関係

$$[P,X]=-i\hbar \tag{A.14.1}$$

$$[P,P]=[X,X]=0 \tag{A.14.2}$$

を満たすエルミートな演算子である．

いま，運動量の固有値を p，規格化された固有関数を $|p\rangle$ とすると，

$$P|p\rangle=p|p\rangle \tag{A.14.3}$$

である．すると，

$$e^{iqX}|p\rangle=|p+\hbar q\rangle \tag{A.14.4}$$

となる．ただしここで q は演算子ではない単なる数である（これを c 数ということがある）．

（A.14.4）の証明は簡単で，次のようにやる．まず，

$$e^{-iqX}Pe^{iqX}=P+i[P,X]q+\frac{i^2}{2}[[P,X],X]q^2+\cdots=P+\hbar q \tag{A.14.5}$$

に気をつける．すると，

$$e^{-iqX}Pe^{iqX}|p\rangle=(P+\hbar q)|p\rangle=(p+\hbar q)|p\rangle \tag{A.14.6}$$

したがって，

$$Pe^{iqX}|p\rangle=e^{iqX}(P+\hbar q)|p\rangle=(p+\hbar q)e^{iqX}|p\rangle \tag{A.14.7}$$

これは，$e^{iqX}|p\rangle$ が，固有値 $p+\hbar q$ をもつ固有関数に比例していることを表している．この固有関数は明らかに規格化されているから，

$$e^{iqX}|p\rangle=|p+\hbar q\rangle \tag{A.14.8}$$

である．

以上の議論を三次元に拡張するのは簡単で，結果は，

$$e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{p}\rangle=|\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}\rangle \tag{A.14.9}$$

となる．

たとえば，この式の左から $\langle\boldsymbol{p}'|$ をかけると，

$$\langle\boldsymbol{p}'|e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{p}\rangle=\langle\boldsymbol{p}'|\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}\rangle=\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} \tag{A.14.10}$$

という運動量保存則が出る．また，$\boldsymbol{X}$ のある関数 $U(\boldsymbol{X})$ の Fourier 変換を，

$$U(\boldsymbol{X})=\sum_{\boldsymbol{k}}\widehat{U}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{X}} \tag{A.14.11}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{p}'|U(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{p}\rangle&=\sum_{\boldsymbol{k}}\widehat{U}(\boldsymbol{k})\langle\boldsymbol{p}'|e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{p}\rangle\\&=\sum_{\boldsymbol{k}}\widehat{U}(\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}}=\widehat{U}((\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})/\hbar)\end{aligned} \tag{A.14.12}$$

となる．

索　　引

L

M

N, O

P

R

S

Y,Z

著者紹介

たかはし　やすし
高橋　康

1951年	名古屋大学理学部卒業
現　在	Professor Emeritus, Department of Physics, University of Alberta Fellow of Royal Society of Canada Fellow of American Physical Society Member of Royal Irish Academy
主要著書	『量子力学を学ぶための解析力学入門』『古典場から量子場への道』『物理数学ノートＩ，II』（すべて講談社）ほか多数

NDC427　198p.　21cm

電磁気学再入門
——QEDへの準備

1994年３月20日　第１刷発行

著　者	高橋　康
発行者	野間佐和子
発行所	株式会社　講談社 〒112-01　東京都文京区音羽2-12-21 販売部　(03)5395-3624 製作部　(03)5395-3615
編　集	株式会社　講談社サイエンティフィク 代表　中島信也 〒162　東京都新宿区新小川町9-25　日商ビル 編集部　(03)3235-3701
印刷所	新日本印刷株式会社・半七写真印刷工業株式会社
製本所	株式会社国宝社

落丁本・乱丁本は，講談社書籍製作部宛にお送り下さい．
送料小社負担にてお取替えします．なお，この本の内容についてのお問い合わせは講談社サイエンティフィク編集部宛にお願いいたします．定価はカバーに表示してあります．

Printed in Japan

ISBN4-06-153213-8　(KS)